Министерство образования и науки Российской Федерации
ГОУ ВПО "Уральский государственный технический
университет – УПИ"

В.И. Максимов
О.И. Никонов

МОДЕЛИРОВАНИЕ РИСКА И РИСКОВЫХ СИТУАЦИЙ

Учебное пособие

Научный редактор – д-р физ.-мат. наук, проф. Н.Н. Астафьев

Екатеринбург
2004

УДК 330.131.7.001
ББК 65.011.3
М 17
Рецензенты:
кафедра "Прикладная информатика в экономике" УрГУПС (зав.кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. В.И. Радченко); зам. директора Института экономики УрО РАН, д-р физ.-мат. наук, д-р экон. наук, проф. Е.В. Попов
Авторы:
В.И.Максимов, О.И.Никонов

М 17 МОДЕЛИРОВАНИЕ РИСКА И РИСКОВЫХ СИТУАЦИЙ: Учебное пособие /В.И. Максимов, О.И.Никонов. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ–УПИ, 2004. 82 с.
ISBN 5-321-00470-6

Описываются некоторые подходы и методы количественного анализа рисков и рисковых ситуаций, возникающих при управлении экономическими процессами и системами. Приводятся способы оценки рисков, базирующиеся на использовании понятий теории вероятностей и математической статистики, теории игр и теории принятия решений.

Пособие предназначено для студентов экономических специальностей, аспирантов и преподавателей вузов, а также для специалистов-практиков в области управления экономическими системами и финансового дилинга.

Библиогр.: 25 назв. Табл.5 Рис. 12.

УДК 330.131.7.001
ББК 65.011.3

ISBN 5-321-00470-6

©ГОУ ВПО "Уральский государственный технический университет - УПИ", 2004
©В.И. Максимов, О.И.Никонов, 2004

Оглавление

Введение **4**

1. Методы теории вероятностей и математической статистики для количественной оценки риска 5
2. Количественные оценки риска и методы их определения 13
3. Шкалы риска 26
4. Риск в теории матричных игр 30
5. Анализ риска с помощью функции полезности 40
6. Финансовый анализ в условиях риска и неопределенности 49

Библиографический список **79**

Введение

Существующая литература характеризуется неоднозначностью в трактовке черт, свойств и элементов риска, в понимании его содержания, соотношения объективных и субъективных сторон. Разнообразие мнений о сущности риска объясняется, в частности, многоаспектностью этого явления. Риск — это сложное явление, имеющее множество несовпадающих, а иногда противоположных реальных оснований. При исследовании тех или иных задач важным фактором является процесс управления риском, один из элементов которого – количественный анализ рисковых ситуаций. Этот анализ предполагает численное определение как отдельных рисков, так и риска в целом. Вопросы измерения рисков обсуждались во многих работах (см., например, [1-16]).

В настоящей работе дается краткий обзор наиболее часто используемых количественных характеристик риска. Приводятся классические критерии оценки и показатели уровня риска, базирующиеся на теории вероятностей и теории игр, индексы и шкалы риска. При этом основное внимание уделяется экономическому и финансовому рискам. В частности, в разделе, посвященном анализу риска операций на финансовом рынке, обсуждаются классические подходы к анализу риска, базирующиеся на теории Г.Марковица и Дж.Тобина, результаты У. Шарпа, С.Росса и других известных специалистов в области финансового анализа. Этот раздел базируется на работах [17-25].

1. Методы теории вероятностей и математической статистики для количественной оценки риска

Случайные величины и распределения. Теория вероятностей и основанная на ней математическая статистика дают, пожалуй, самые широко используемые методы оценки и управления рисками. Базовым здесь является понятие *случайной величины*. Простейший, но важный класс образуют *дискретные случайные величины* с конечным множеством значений. Каждая случайная величина из этого класса определяется своим *распределением*, которое может быть задано в виде таблицы:

X	X_1	X_2	$\ldots$	X_n
P	P_1	P_2	$\ldots$	P_n

Здесь X_i $(i = 1, 2 \ldots, N)$ — значение случайной величины; P_i — вероятность реализации (появления) значения X_i. Значениями случайной величины могут быть количественные оценки последствий какого-либо действия, например величины дохода, прибыли и иных характеристик экономико-управленческой деятельности.

Эквивалентный способ задания дискретной случайной величины – это определение ее *функции распределения*, т.е. функции вида $F(x) = P(X_i < x)$, показывающей вероятность того, что случайная величина принимает значение меньшее фиксированного значения x. Для дискретной случайной величины функция распределения является кусочно-постоянной и ее график имеет вид, изображенный на рис.1.

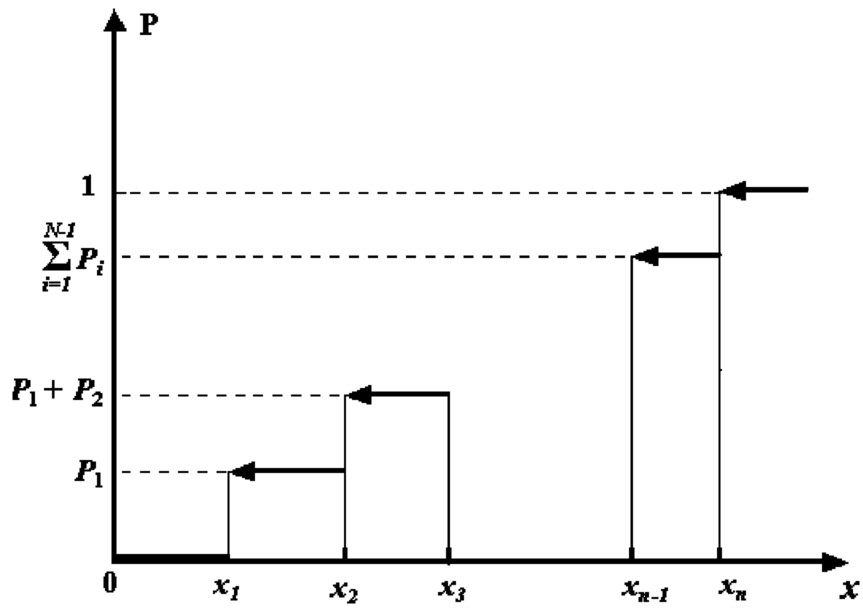

Рис.1. Функция распределения дискретной случайной величины

Основными характеристиками случайной величины, используемыми при расчете риска, являются:

- математическое ожидание (ожидаемое или среднее значение) M изучаемой случайной величины (последствий какого-либо действия, например, дохода, прибыли и т.п.);
- дисперсия σ^2;
- стандартное (среднеквадратичное) отклонение σ;
- коэффициент вариации V (стандартное относительное отклонение).

Для дискретной случайной величины с конечным множеством значений ее среднее значение определяется соотношением

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i P_i.$$

Средняя величина представляет собой обобщенную количественную характеристику ожидаемого результата.

Важной характеристикой, определяющей меру изменчивости возможного результата, является дисперсия — средневзвешенное из квадратов отклонений действительных результатов от среднего:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - M(X))^2 P_i,$$

а также очень близко с ним связанное стандартное или среднеквадратичное отклонение, определяемое равенствами

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (X_i - M(X))^2 P_i}.$$

Иными словами, дисперсия — это усредненное отклонение случайной величины от ее математического ожидания. Стандартное отклонение показывает меру отклонения измеряемой величины от своего среднего значения в тех же единицах, что и она сама (не в квадратах, как дисперсия).

Средний квадратичный разброс можно также рассчитать по формулам:

$$\sigma^2 = \sum_i P_i X_i^2 + \sum_i P_i M(X)^2 - 2M(X) \sum_i P_i X_i;$$

$$\sigma^2 = \sum_i P_i X_i^2 - M(X)^2.$$

Стандартное относительное отклонение — это стандартное отклонение, выраженное в долях математического ожидания,

$$V = \frac{\sigma}{M(X)}. \tag{1.1}$$

Дисперсия и среднеквадратическое отклонение служат *мерами абсолютного рассеяния*, в то время как стандартное относительное отклонение по самому своему определению есть мера рассеяния возможных результатов, учитывающая средний ожидаемый результат.

Кроме рассмотренных выше дискретных случайных величин существуют случайные величины с иными типами распределения вероятностей. Наиболее часто используются непрерывные случайные величины. Они могут принимать бесконечное множество значений, часто считается, что теоретически значение может быть любым числом из заданного промежутка или всей числовой прямой. Как и для любой случайной величины, функция распределения, задаваемая равенством $F(x) = P(X_i < x)$, полностью определяет непрерывную случайную величину. Специфика непрерывных случайных величин состоит в том, что функция $F(x)$ для них предполагается непрерывно дифференцируемой на всей числовой прямой (иногда накладывают несколько более слабые условия).

В силу сделанных предположений и свойств, вытекающих из определения функции распределения как вероятности некоторого события, зависящего от аргумента x, для величины $F(x)$ справедливо представление

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Здесь $f(x) = F'(x)$ – так называемая плотность распределения или дифференциальная функция распределения.

Важным свойством графика дифференциальной функции распределения (рис.2) является то, что площадь, ограниченная кривой $y = f(x)$ и осью абсцисс, всегда равна единице.

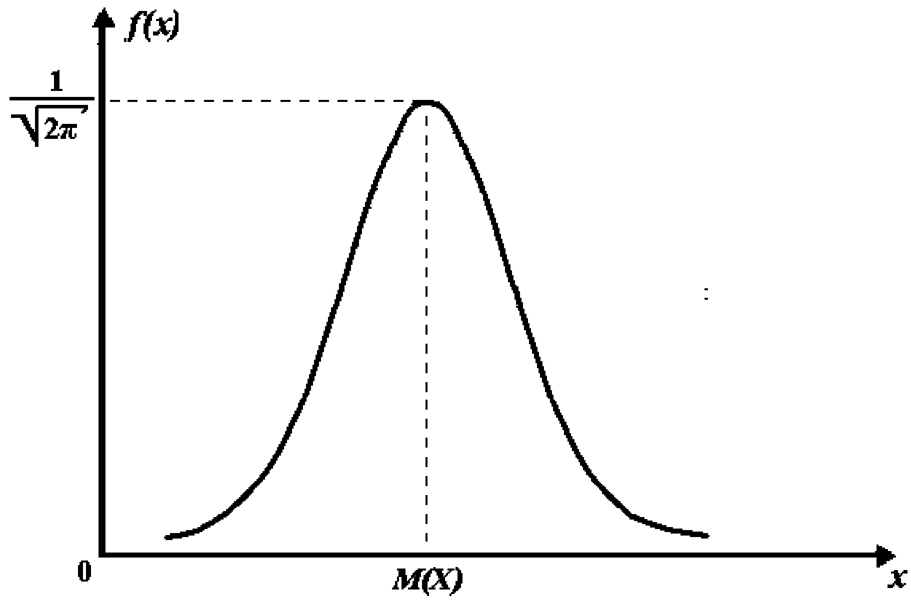

Рис.2. Плотность нормально распределенной случайной величины

Использование функции плотности распределения позволяет вычислить вероятность попадания случайной величины X в интервал (α, β), которая определяется следующим образом:

$$P(y < X < \beta) = F(\beta) - F(y) = \int_{y}^{\beta} f(t)\, dt,$$

где $f(t)$ — дифференциальная функция распределения случайной величины X .

Изложенные выше положения довольно часто являются исходной базой количественной оценки риска на основе использования вероятностно-статистических методов. Характер, тип распределения отражает общие условия, вытекающие из сущности и природы явления, и особенности, оказывающие влияние на вариацию исследуемого показателя (ожидаемого результата).

Для моделирования распределений, возникающих при исследовании социально-экономических явлений, наиболее часто используется так называемое нормальное распределение. Известно, что закон нормального распределения характерен для распределения событий в случае, когда их исход представляет собой результат совместного воздействия большого количества независимых факторов и ни один из этих факторов не оказывает преобладающего влияния. В действительности нормальное распределение для экономических явлений в чистом виде встречается редко, однако если однородность совокупности соблюдена, фактические распределения можно считать близкими к нормальному. На практике для проверки обоснованности выбора того или иного типа распределения используются различные статистические критерии согласия (между эмпирическим и теоретическим распределением), которые позволяют принять или отвергнуть принятую гипотезу о законе распределения.

Нормально распределенная случайная величина является непрерывной и ее дифференциальная функция распределения имеет вид

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-(x-M(X))^2}{2\sigma^2}}.$$

График функции плотности нормального распределения описывается так называемой нормальной кривой (кривой Гаусса). Эта кривая и изображена на рис. 2.

Пусть планируемое значение некоторой случайной величины равно $M(X)$ и известна плотность распределения вероятности. Зададим максимально допустимое отклонение Δ фактического результата X_{exp} от $M(X)$. Тогда границы, в которых должен находиться этот результат, будут равны $X^* = M(X) - \Delta$, $X^{**} = M(X) + \Delta$. В общем случае нет необходимости предполагать, что планируемый результат совпадает с $M(X)$, ожидаемая (планируемая) величина может отличаться от средней. Границы возможных изменений по отношению к ожидаемой (запланированной) величине также могут располагаться асимметрично. Исходя из смысла функции плотности распределения, вероятность P_1 того, что достигаемый результат X_{exp} будет находиться в допустимых пределах , определится равенством

$$P_* = P(X^* \leq X_{\text{exp}} \leq X^{**}) = \int\limits_{X^*}^{X^{**}} f(t)\,dt.$$

Вероятность P_* равна площади заштрихованного участка на рис. 3.

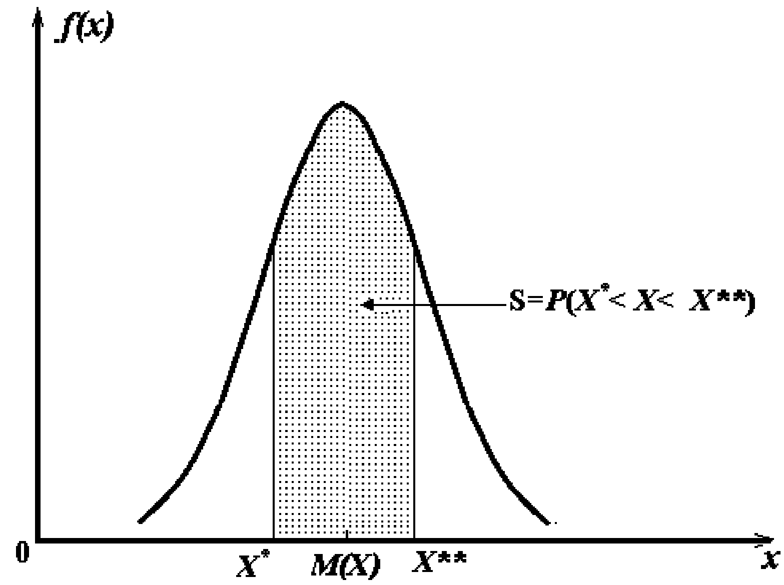

Рис.3. Определение вероятности события по плотности распределения

Полученную таким образом вероятность P_* можно назвать *вероятностью достижения ожидаемого (планируемого) результата*. Возникает вопрос о том, какова вероятность попадания величины X_{exp} за пределы допустимых границ. Эту вероятность мы обозначаем символом P^*. Вычислив площадь незаштрихованного участка на рис. 3 , мы получаем ответ на этот вопрос. Заметим, что справедливо равенство

$$P^* = P(X_{\text{exp}} < X^*) + P(X_{\text{exp}} > X^{**}) =$$
$$= 1 - P(X^* \leq X_{\text{exp}} \leq X^{**}),$$

т.е.

$$P^* = 1 - P_*.$$

Как правило, граница изменения ожидаемого результата в положительную сторону (направление) не устанавливается, поэтому при определении P^* в большинстве случаев речь идет только о величине $P^* = P(X_{\text{exp}} < X^*)$.

2. Количественные оценки риска и методы их определения

Начнем с описанной в конце предыдущего раздела ситуации со случайной величиной X, имеющей заданную плотность распределения. Предполагать, что планируемое значение X_{exp} совпадает с математическим ожиданием $M(X)$ уже не будем.

Предположим, что исследуемой величиной X является, например, производительность труда, а отдачей (выходом, полезностью) — чистая прибыль. Одной и той же величине производительности труда могут соответствовать различные величины чистой прибыли. Допустим, что нам удалось установить (каким-либо способом) аналитическую зависимость между производительностью труда и чистой прибылью. Назовем установленную зависимость $U = U(x)$ *функцией отдачи* (функцией полезности).

Разобьем ось абсцисс на достаточно малые отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ и обозначим значения функции отдачи в средних точках x'_i этих отрезков (вправо от ожидаемых значений) через $U(x'_i)$. Вычислим величину отдачи в соответствии с вероятностью попадания исследуемой величины X в отрезок $[x_{i-1}, x_i]$. По определению функции плотности вероятности это значение вероятности равно

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\, dt,$$

а ожидаемая величина отдачи при значениях производительности труда в пределах данного отрезка может быть аппроксимирована выражением

$$U(x_i') \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\, dt.$$

Суммируем полученные произведения в области $x > X_{\text{exp}}$:

$$U_{\text{в}} = \sum_i U(x_i') \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\, dt, \quad x_i' = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}.$$

Сумма отдачи в области $x > X_{\text{exp}}$ характеризует *возможный выигрыш* $U_{\text{в}}$.

Заметим, что описанная процедура расчета величины $U_{\text{в}}$ соответствует приближенному вычислению используемого в теории вероятностей интеграла Стилтьеса по функции распределения случайной величины, точное значение которого получится при стремлении длин отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ к нулю.

Аналогичные расчеты в области $X < X_{\text{exp}}$ характеризуют *возможные потери* $U_{\text{п}}$:

$$U_{\text{п}} = \sum_i U({x^*}_i') \int\limits_{{x^*}_{i-1}}^{{x^*}_i} f(t)\, dt, \quad {x^*}_i' = \frac{{x^*}_{i-1} + {x^*}_i}{2}.$$

Иллюстрация описанной процедуры приведена на рис.4.

Используя проведенные построения, *коэффициент риска* определим следующим образом:

$$r = U_{\text{п}}/U_{\text{в}}.$$

Очевидно, что риск уменьшается, если растет вероятность наступления события $X > X_{\text{exp}}$ (за счет уменьшения интервала $x < X_{\text{exp}}$, так как площадь, ограниченная всей кривой плотности, остается неизменной). Аналогично риск уменьшается , если в области $x > X_{\text{exp}}$ растет отдача или в области $x < X_{\text{exp}}$ уменьшаются потери, что определяется характером функции отдачи в указанных областях.

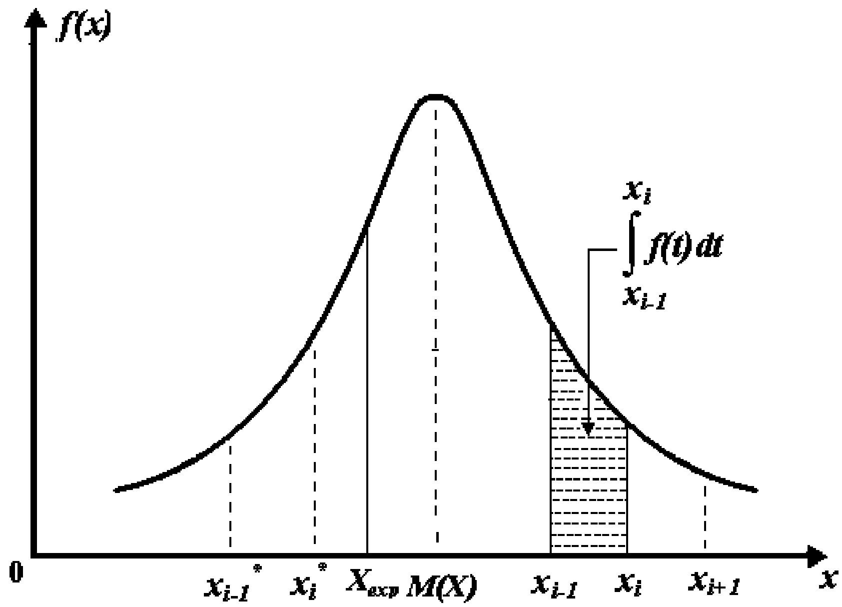

Рис.4. Приближенный расчет величины отдачи

Величина рассматриваемого коэффициента риска r может изменяться от 0 до $+\infty$. Случай, когда $U_{\text{п}} = 0$, $r = 0$ означает отсутствие риска. Такое положение наступает, например, во всех случаях, когда решение принимается с такой степенью надежности, что величину показателя X_{exp} принимают лежащей на нижней границе действительной области изучаемой величины. При движении X_{exp} к нижней границе имеем

$$U_{\text{п}} \longrightarrow 0$$

или $r \longrightarrow 0$.

Если же X_{exp} стремится к верхней границе действительной области значений изучаемой величины, то справедливы соотношения

$$U_{\text{в}} \longrightarrow 0$$

или $r \longrightarrow +\infty$.

Замечание. В случае, если действительная плотность распределения аппроксимируется функцией плотности нормального распределения, т.е. распределение считается нормальным, указанные границы часто полагают равными $a \pm 3\sigma$. Вероятность принять значения вне промежутка $(a - 3\sigma,\ a + 3\sigma)$ менее 0,01.

Полученный таким образом коэффициент риска (будем называть его теоретическим) отражает *экономическую сторону риска.* Следует отметить, что его использование затруднено рядом обстоятельств, которые мы укажем ниже.

Вводя выше коэффициент риска, мы использовали теоретико-вероятностные понятия. Однако этот коэффициент можно ввести и абстрагируясь от теории вероятностей.

А именно: пусть исследуется некоторая величина X, подверженная риску. Символом X_{exp} обозначим ее планируемое значение. Пусть имеется числовой показатель качества величины X, обозначаемый U (выше это была функция отдачи). Назовем *коэффициентом риска (в общем случае)* величину

$$r = \frac{U^-}{U^+}.$$

Здесь U^- — числовая характеристика (мера) значений X, меньших X_{exp} (в случае отклонения X от X_{exp}); U^+ — числовая характеристика значений X, больших X_{exp}. Таким образом, U^- и U^+ определяются следующим образом:

$$U^- = U\{X|X < X_{\text{exp}}\},$$

$$U^+ = U\{X|X_{\text{exp}} \geq X_{\text{exp}}\}.$$

Коэффициент риска r в общем случае показывает соотношение ожидаемых величин отрицательных и положительных отклонений значений X от ожидаемого уровня X_{exp}. Он содержит:

- планируемое значение X_{exp} исследуемой величины X;
- значения показателей качества, относящихся к возможным ситуациям, показывающие соответствующие размеры прибыли или потерь.

В простейшем случае, когда величина X сама характеризует результат (прибыль, доход и аналогичные величины) и множество возможных вариантов ее значений состоит из N элементов X_i, коэффициент риска ожидаемого результата X_{exp} может быть рассчитан по формуле

$$r = \left(\frac{\sum X_i(\text{таких, что } X_i < X_{\text{exp}})}{n} - X_{\text{exp}}\right) \Big/ \left(\frac{\sum X_i(\text{таких, что } X_i \geq X_{\text{exp}})}{N - n} - X_{\text{exp}}\right),$$

где количество элементов $X_i < X_{\text{exp}}$ равно n.

Одним из недостатков рассмотренного коэффициента риска являются границы его изменения (от 0 до $+\infty$), что затрудняет принятие решений в конкретной ситуации. Устранение этого недостатка осуществляется путем нормирования коэффициента риска, в результате чего его величина изменяется в конечных пределах (например, от 0 до 1).

Нормированный коэффициент риска будем называть *индексом риска.* Вариантом такого нормирования является следующее преобразование:

$$r^* = \frac{r}{r + \varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$.

Возникает вопрос — какое значение следует придать ε? Прежде, чем ответить на него, отметим важную роль этого параметра. Выбором различных значений ε для разных отраслей можно добиться сближения уровней риска, которые неодинаковы в силу объективных условий, например различных отраслей экономики.

А именно: если положить величину ε равной среднему риску для данной отрасли, то при $r = \varepsilon$) индекс риска составит $0,5$, т.е. для всех отраслей индексы риска в среднем будут одинаковы и равны $0,5$.

Иной способ позволяет ограничить изменение индекса риска в пределах от нуля до единицы, не уравнивая полностью индексы отраслей. В том варианте величину ε выбирают как положительный корень уравнения

$$\frac{\overline{r}}{\overline{r} + \varepsilon} = \varepsilon, \tag{2.1}$$

где через $\overline{r}$ обозначен средний коэффициент риска.

Уравнение (**??**) имеет единственный положительный корень

$$\varepsilon = \frac{-\overline{r} + \sqrt{\overline{r}^2 + 4\overline{r}}}{2}.$$

Какие же свойства имеет индекс риска r^* с параметром ε, определенным таким образом? Во первых, $r^* = \varepsilon$ и $0 < r^* < 1$ при $\overline{r} > 0$, во-вторых, если $\overline{r}_1 > \overline{r}_2$, то $r_1^* > r_2^*$. Таким образом, переход средних рисков к соответствующим индексам риска позволяет работать с величинами из промежутка $[0, 1]$, при этом большим значениям средних рисков соответствуют большие значения индекса, а меньшим – меньшие. Эти свойства нетрудно установить аналитически, проведя исследование явного выражения для r^*. Геометрическая иллюстрация решения уравнений (**??**) приведена на рис.5.

Вторая группа свойств индекса r^* выражается соотношениями:

$$\overline{r} < r^* < 0,5$$

при $\overline{r} < 0,5$;

$$0,5 < r^* < \overline{r}$$

при $\overline{r} > 0,5$ и

$$\overline{r} = r^* = 0,5$$

при $\overline{r} = 0,5$.

Приведенные неравенства означают, что индексы риска для отраслей с различными степенями риска группируются около значения $0,5$.

Рассмотрим следующий пример. Пусть имеются две отрасли и в каждой — по два коэффициента риска:

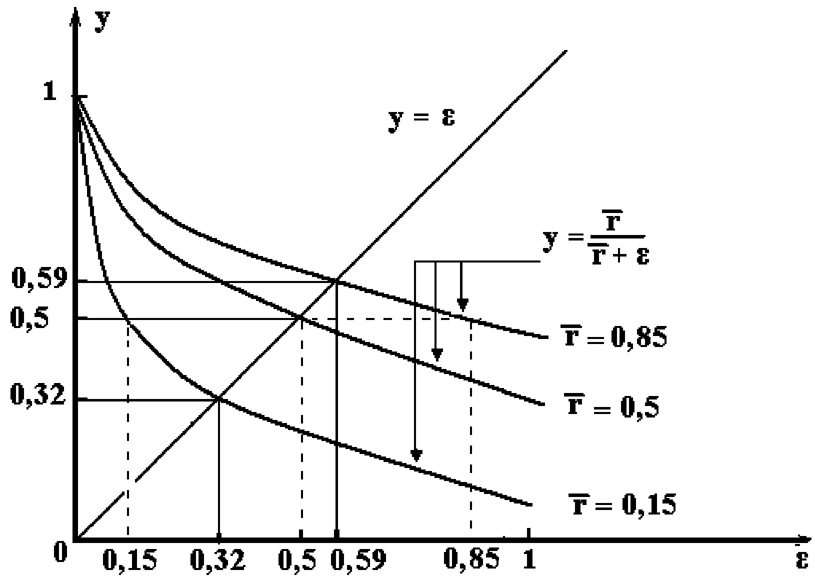

Рис.5. Свойства индекса риска

1) $r_1^1 = 0,1$; $r_2^1 = 0,2$;
2) $r_1^2 = 0,8$; $r_2^2 = 0,9$.

В первой отрасли $\overline{r} = 0,15$ и $\varepsilon = 0,31$, во второй соответственно $\overline{r} = 0,85$ и $\varepsilon = 0,59$. Значения ε и будут индексами риска в соответствующих отраслях. На рис. 5 изображена эта ситуация. Корни уравнения (**??**) – ординаты точек пересечения прямой $y = \varepsilon$ и кривых

$$y = \frac{\overline{r}}{\overline{r} + \varepsilon}$$

с соответствующими значениями параметра $\overline{r}$. Названные кривые проходят через точки $(0; 1)$ и $(\overline{r}; 0,5)$.

В приведенных построениях коэффициенты риска r зависят от планируемого значения исследуемого показателя, т.е. $r = r(X_{\text{exp}})$. Таким образом, коэффициент риска r можно рассматривать как некоторую функцию $r = r(x)$. Если аргумент x — случайная величина, то можно говорить о функции распределения коэффициента риска, а следовательно, и о функции распределения индекса риска.

Приведенный выше пример (можно привести и другие) свидетельствует о том, что надлежащим преобразованием можно обеспечить сближение индексов риска для различных отраслей. В случае случайных аргументов еще более желательным результатом было бы сближение распределений индексов риска. Обозначим через s_i "вес" отрасли i, через $F_i(x)$ — распределение индекса риска для отрасли i. Тогда естественно находить $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ из условия минимизации величины

$$\sum_{\substack{i \\ i \neq j}}^{n} s_i s_j |F_i(x) - F_j(x)|$$

или, если обозначить символом $G_i(x)$ распределение коэффициентов риска, величины

$$\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{n} \left[s_i s_j \left| G_i(\frac{x}{x+\varepsilon_i}) - G_j(\frac{x}{x+\varepsilon_j}) \right| \right].$$

Еще одним существенным недостатком коэффициента риска является то, что с его помощью невозможно учесть субъективные факторы. Известно, что одна и та же объективная ситуация может означать неодинаковую степень риска для предпринимателей, деятельность которых протекает на различном "фоне". Так, например, возможные потери в сумме 10 тыс. долларов для одного предпринимателя могут стать катастрофическими, так как приведут к его полному разорению, а для другого такие потери могут оказаться практически неощутимыми. Эти субъективные обстоятельства никак не учитываются посредством рассмотренного выше коэффициента риска.

И, наконец, одним из серьезных недостатков коэффициента риска является необходимость иметь при его определении функцию полезности — тщательно рассчитанные зависимости между изучаемым показателем и относительной отдачей. Установление таких зависимостей для разнообразных сложных экономических показателей в большинстве случаев — задача достаточно сложная и трудноразрешимая. Ее решение требует знания обширной (иногда труднодоступной, либо отсутствующей вообще) информации, значительного времени и затрат, поэтому рассмотренный коэффициент риска используется при планировании и оценке крупных проектов и программ.

Указанные выше недостатки приводят к тому, что на практике используются различные *критерии оценки* и *показатели уровня риска* в зависимости от сложности решаемых задач и сферы предпринимательской деятельности. При этом наряду с количественным определением уровня риска его оценка дополняется с помощью различных шкал, являющихся в некоторой степени рекомендациями по “приемлемости” риска и учитывающих субъективные факторы. Рассмотрим некоторые такие подходы к оценке риска.

В ряде случаев, в частности в страховом бизнесе, в качестве количественной оценки риска используется вероятность наступления рискового события. Одним из наиболее распространенных подходов к количественной оценке риска является использование выражения

$$R = U_{\text{п}} P,$$

где $U_{\text{п}}$ — величина потерь; P — вероятность наступления рискового события. Таким образом, *степень риска* определяется как произведение ожидаемого ущерба на вероятность того, что такой ущерб произойдет.

Отношение субъекта к соотношению возможных потерь и выигрыша в значительной степени зависит от его имущественного состояния, поэтому на практике часто используют коэффициент риска r, определяемый как отношение возможных максимальных потерь $U_{\text{п max}}$ к объему собственных финансовых ресурсов U_c предпринимателя (фирмы)

$$r = U_{\text{п max}}/U_c.$$

Величина этого коэффициента определяет *риск банкротства.* В большинстве случаев указанные количественные оценки риска и методы их определения используются для оценки отдельных видов риска. Вместе с тем они могут быть использованы и для оценки риска проекта в целом. Это относится к случаям, когда имеются количественные данные по каждому риску или когда для оценки риска проекта используются экспертные методы, в процессе которых оценивается вероятность успешной реализации проекта и (или) величина возможных потерь вследствие наступления различного рода нежелательных исходов.

Так, если проект подвержен различным видам риска и имеются данные о величине потерь по каждому виду, то *обобщенный коэффициент риска банкротства* определится соотношением

$$r = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} U_{\text{п max}}^{(i)}}{k} = \sum_{i=1}^{N} r_i,$$

где N — число учитываемых видов риска; $U_{\text{п max}}^{(i)}$ — максимально возможные потери по i-му виду риска; r_i — коэффициент, определяющий риск банкротства по i-му виду риска.

При наличии данных о потерях и вероятности их возникновения по каждому виду риска *обобщенный коэффициент риска проекта* определяется как сумма средневзвешенных показателей риска каждого вида, т.е. из выражения

$$R = \sum_{i=1}^{N} P_i U_{\text{п max}}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} R_i.$$

Как отмечалось ранее, при отсутствии необходимых статистических данных количественная оценка как отдельных рисков, так и риска проекта в целом осуществляется методом экспертных оценок. При этом каждый вид риска характеризуется несколькими показателями (факторами). Оценка этих показателей определяется экспертами в баллах, кроме того, каждому из показателей назначается вес, соответствующий его значимости.

Количественная оценка риска каждого вида и риска проекта в целом определяется из следующих выражений:

$$R = \sum_{j=1}^{N} R_j g_j, \quad R_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n_j} R_{ij} g_{ij} \quad (j = \overline{1, N}),$$

где R_{ij} — балльная оценка i-го фактора в j-м виде риска; g_{ij} — вес i-го фактора в j-м виде риска; n_j — число учитываемых факторов в j-м виде риска; m — размах балльной шкалы, в пределах которой осуществляется оценка факторов; g_j — вес j-го вида риска; R_j — количественная оценка j-го вида риска; R — обобщенный показатель риска (риск проекта).

При балльной оценке отдельных рисков и риска проекта в целом используются следующие правила:

- балльная оценка каждого фактора осуществляется в пределах балльной шкалы $0 \leq R_{ij} \leq m$ (как правило, от 0 до 10 баллов) в зависимости от степени влияния данного фактора на степень j-го вида риска с ранжированием от 0 (не оказывает влияния) до m (очень высокое влияние);

- вес каждого фактора в пределах соответствующего вида риска и вес каждого вида риска устанавливается в пределах $(0, 1)$ при выполнении условий:

$$\sum_{i=1}^{n_j} g_{ij} = 1 \quad (j = \overline{1, N}) \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{N} g_j = 1.$$

При выполнении указанных условий количественная оценка каждого вида риска и обобщенный показатель риска (риск проекта) принимают значение из интервалов $0 \leq R_{ij} \leq 1$ и $0 \leq R_j \leq 1$. Таковы некоторые наиболее распространенные подходы к определению количественных оценок экономического риска.

3. Шкалы риска

Как отмечалось ранее, в настоящее время отсутствуют научно обоснованные рекомендации по определению "приемлемости в процессе принятия управленческих решений" того или иного уровня риска в конкретной ситуации. Кроме того, в ряде рассматриваемых нами и широко используемых на практике оценках уровня риска отсутствуют потери. Вместе с тем при выработке стратегии поведения и в процессе принятия конкретного решения предпринимателю целесообразно различать и выделять определенные зоны риска в зависимости от уровня возможных потерь. Попыткой восполнить указанные недостатки и дополнить полученные оценки уровня риска нужной в процессе принятия управленческих решений информацией является разработка и использование различного рода так называемых шкал риска, позволяющих классифицировать поведение лиц, принимающих на себя хозяйственный риск.

Как и по большинству других вопросов, в литературе нет единого подхода к построению и критериям оценки шкалы риска. Многообразие показателей, посредством которых осуществляется количественная оценка риска, порождает и многообразие шкал риска, являющихся своего рода рекомендациями приемлемости того или иного уровня риска. Так, на основании обобщения результатов исследований многих авторов по проблеме количественной оценки экономического риска в [3] приведена эмпирическая шкала риска, которую рекомендуют применять предпринимателям при использовании ими в качестве количественной оценки риска вероятности наступления рискового события (табл. 1).

Таблица 1: Эмпирическая шкала уровня риска

Вероятность нежелательного исхода (величина риска),доли 1	Градации риска
$0,0$–$0,1$	минимальный
$0,1$–$0,3$	малый
$0,3$–$0,4$	средний
$0,4$–$0,6$	высокий
$0,6$–$0,8$	максимальный
$0,8$–$1,0$	критический

По мнению авторов, первые три градации вероятности нежелательного исхода соответствуют “нормальному”, “разумному” риску, при котором рекомендуется принимать обычные предпринимательские решения. Принятие решений с более высоким уровнем риска зависит от склонности к риску лиц, принимающих решение. Однако принятие таких решений возможно только в случае, если наступление нежелательного исхода не приведет предпринимателя (фирму) к банкротству.

В [2] приведена шкала, которая дает оценку степени риска при использовании в качестве критерия риска среднего ожидаемого значения $M(X)$ и среднеквадратического отклонения σ^2 как меры изменчивости возможного результата.

Для оценки приемлемости отклонения используется коэффициент вариации ($V = \sigma / M(X)$ – см. п.2). При этом приводятся следующие зоны риска для данного критерия:

до $0,1$— слабая;
от $0,1$ до $0,25$ — умеренная;
свыше $0,25$ — высокая.

При оценке приемлемости коэффициента, определяющего риск банкротства, существует несколько не противоречащих друг другу точек зрения. Одни авторы считают, что оптимальным является коэффициент риска, составляющий $0,3$, а коэффициент риска, ведущий к банкротству — $0,7$ и выше. В других источниках приводится шкала риска со следующими градациями указанного выше коэффициента:
приемлемый риск — до $0,25$;
допустимый риск — от $0,25$ до $0,50$;
критический риск — от $0,50$ до $0,75$;
катастрофический риск — свыше $0,75$.

По мнению практически всех авторов, в границах коэффициента от $0,3$ до $0,7$ находится зона повышенного риска. Принятие решений о реализации рискового мероприятия в границах этой зоны определяется величиной возможного выигрыша, в случае, если нежелательный исход (рисковое событие) не произойдет, и склонностью к риску лиц, принимающих решение.

Безотносительно к коэффициентам риска существуют описательные характеристики шкал риска по величине ожидаемых потерь, которые можно рекомендовать для оценки приемлемости содержащего риск решения.

Достаточно близкие, на наш взгляд, по формулировке и наиболее приемлемые для оценки и практического применения градации риска приведены в книге [5], а также в [4].

В работе [5] градации риска в зависимости от уровня возможных потерь осуществляются путем выделения следующих весьма условных *зон риска*:

1) приемлемого;
2) допустимого;
3) критического;
4) катастрофического.

Другие авторы [4] выделяют *области риска*:

1) минимального;
2) повышенного;
3) критического;
4) недопустимог.

При этом характеристики указанных градаций (зон, областей) практически совпадают.

Зона приемлемого (минимального) риска характеризуется уровнем потерь, не превышающим размеры чистой прибыли.

Зона допустимого (повышенного) риска характеризуется уровнем потерь, не превышающим размеры расчетной прибыли.

Мы лишь бегло остановились на принципах формирования различных шкал рисков. Более подробно этот вопрос обсуждается в цитированной литературе.

4. Риск в теории матричных игр

В теории игр часто предполагается, что игроки выбирают свои стратегии независимо друг от друга. Целью игры является, как правило, выбор стратегии, соответствующей точке равновесия, т.е. такой ситуации, отклонение от которой каждого игрока по отдельности разве лишь ухудшает его результат.

Между тем стратегия равновесия (равновесная стратегия) — это стратегия надежности, она отражает стремление получить гарантированный результат независимо от действий партнеров. Естественным следствием этого является тот факт, что она обеспечивает, вообще говоря, очень скромный выигрыш. Однако вполне разумным является также выбор стратегии, отличающейся от равновесной и связанной с определенным риском. При выборе такой стратегии нужно учитывать все возможности, которые открываются в ходе игры: предполагаемое поведение игроков, выгоды, которые могут быть получены в результате избранной стратегии, их стабильность и т.п.

Заметим, что в теории игр предполагается, что среди игроков имеется хотя бы один, который действует сознательно и целенаправленно, остальные же могут руководствоваться случайным выбором, примером служат так называемые "игры против природы". В этом случае считается, что свою стратегию природа "выбирает" независимо от других участников игры.

Рассмотрим матричную игру (например, "игру против природы"). В матрице игры (для наглядности изобразим ее в виде таблицы) строки означают возможные варианты решений, принимаемых игроком (им могут быть плановик, руководитель и т.п.), а столбцы — возможные состояния природы (хозяйственной среды). Элемент матрицы a_{ij} означает сумму платежа в ситуации, когда игрок (будем называть его первый игрок) принимает решение i (выбирает стратегию i) при состоянии природы j (второй игрок выбирает стратегию j). Естественно полагать, что игрок стремится максимизировать сумму платежа, а природа (исходим из наихудших из возможных ситуаций) — минимизировать. Постановка игровой задачи оптимизации решений, принимаемых в условиях риска, может быть представлена следующим образом:

- имеется n возможных стратегий $s_1, s_2, \ldots, s_n$ первого игрока;

- возможные варианты действий контрагента ("состояния природы") точно неизвестны, однако о них можно сделать m предположений $q_1, q_2, \ldots, q_m$ (стратегии второго игрока);

- результат, так называемый выигрыш a_{ij}, соответствующий каждой паре стратегий первого и второго игроков, может быть представлен в виде элемента платежной матрицы (см. табл.2).

Выигрыши, указанные в таблице, являются показателями эффективности решений. Выбор решения в условиях риска предполагает, что вероятности возможных вариантов обстановки известны. Эти вероятности определяются на основе статистических данных, а при их отсутствии — на основе экспертных оценок. Наличие выигрышей, яв-

Таблица 2: Матрица платежей (выигрышей) в игре с двумя участниками

Варианты стратегий 1-го игрока	Варианты стратегий 2-го игрока			
	q_1	q_2		q_m
s_1	a_{11}	a_{12}		a_{1m}
s_2	a_{21}	a_{22}		a_{2m}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
s_n	a_{n1}	a_{n2}		a_{nm}

ляющихся показателями эффективности решений, позволяет определить потери в результате принятия неоптимальных решений.

Укажем некоторые критерии, которые используются при принятии решений в теории игр.

Принцип недостаточного обоснования Лапласа используется в случае, если можно предполагать, что любое из возможных состояний природы не более вероятно, чем другое, т.е. считается, что все состояния равновероятны. Таким образом, стратегия s_i “предпочтительнее” стратегии s_j (пишем в дальнейшем $s_i > s_j$), если $M(s_i) > M(s_j)$, где $M(s)$ – ожидаемый выигрыш при использовании стратегии s, или

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik} > \sum_{k=1}^{m} a_{jk}.$$

Применение этого критерия целесообразно в тех случаях, когда велики различия между отдельными состояниями природы, т.е. велика дисперсия значений a_{rk}, $k =$

$1, \ldots, n$. Это очень удобный критерий, но его недостаток заключается в том, что теряется структура игры.

Максиминный критерий Вальда предлагает выбор самой осторожной, пессимистической стратегии, что соответствует минимаксной стратегии в статистических играх. Критерий Вальда рекомендует выбирать такой вариант, при котором в худших условиях достигается наибольший эффект:

$$s_i > s_j, \quad \text{если} \quad \min_k a_{ik} > \min_k a_{jk}.$$

Таким образом, критерий Вальда используется в случаях, когда требуется гарантия, чтобы выигрыш в любых условиях оказывался не менее, чем наибольший из возможных в самых худших условиях. Наилучшим решением будет то, для которого выигрыш окажется максимальным из всех минимальных при различных вариантах условий. Критерий, используемый при таком подходе, получил название максимина. Его формализованное выражение

$$\max_i \min_j a_{ij}.$$

Данный критерий прост и четок, но консервативен в том смысле, что ориентирует принимающего решение на слишком осторожную линию поведения. В связи с этим критерием Вальда главным образом пользуются в случаях, когда необходимо обеспечить успех при любых возможных условиях.

Критерий обобщенного максимина (пессимизма — оптимизма) Гурвица используется в том случае, когда требуется выбрать "среднюю" линию поведения —

между линией поведения в расчете на “худшее” и линией поведения в расчете на “лучшее”. Он предлагает компромиссное правило выбора стратегии поведения. Для каждой стратегии s_i выбирается величина

$$h_i = \lambda \max_k a_{ik} + (1-\lambda) \min_k a_{ik},$$
$$0 \le \lambda \le 1.$$

И, таким образом,

$$s_i > s_j, \quad \text{если} \quad h_i > h_j.$$

Очевидно, что зависимость величины h_i, $i = 1, \dots, n$ от параметра λ очень велика. Этот параметр можно назвать “параметром оптимизма”, так как увеличение λ означает повышение уверенности в успехе. Применение этого критерия осложняется, когда нет обоснованного представления о величине параметра λ. Очевидно, этим параметрам в разных ситуациях целесообразно придавать различные значения. Можно отметить, что критерий Вальда является частным случаем критерия Гурвица при $\lambda = 0$. Если $\lambda = 1$, то мы имеем дело с крайне оптимистической точкой зрения, которую будем называть стратегией *максимакс*.

Значения λ между 0 и 1 являются промежуточными между наибольшим риском и осторожностью и выбираются в зависимости от конкретной обстановки и склонности к риску лица, принимающего решение. Недостатком критерия Гурвица (кроме того, что λ — трудно определяемый, субъективный параметр) является то, что он охватывает не всю структуру целиком, а только один или два ее элемента, остальная же информация не используется.

Минимаксный критерий Сэвиджа используется в тех случаях, когда требуется в любых условиях избежать большого риска. В соответствии с этим критерием предпочтение следует отдать решению, для которого максимальные при различных стратегиях поведения потери окажутся минимальными. Критерий Сэвиджа пытается минимизировать “упущенную выгоду”. Достигается это с помощью перехода к другим данным, которые уже рассчитываются по критерию Вальда. Формула перехода —

$$b_{ij} = a_{ij} - \max_k a_{kj}.$$

В ней b_{ij} означает выгоду, которую мы упустили, не зная, какое из состояний наступит в соответствующий момент. Таким образом, критерий можно обобщить в виде

$$s_i > s_j, \quad \text{если} \quad \min_k (a_{ik} - \max_r a_{rk}) \geq \min_k (a_{jk} - \max_r a_{rk}).$$

Критерий Сэвиджа представляется весьма приемлемым при принятии решений на длительный период. Например, некоторые экономисты считают его наиболее приемлемым для решений по капиталовложениям на перспективу. Этот критерий также относится к разряду осторожных. Однако в отличие от критерия Вальда, который направлен на получение гарантированного выигрыша, критерий Сэвиджа минимизирует возможные потери.

Основным исходным допущением этого критерия является предположение о том, что на наступление вариантов обстановки оказывают влияние действия разумных противников (конкурентов), интересы которых прямо противоположны интересам лица, принимающего решение. И если у противников (конкурентов) имеется возможность извлечь какие-либо преимущества, то они это обязательно сделают. Это обстоятельство заставляет лицо, принимающее решение, обеспечить минимизацию потерь вследствие этих действий.

Критерий Байеса применяется в тех случаях, когда известно распределение вероятностей возможных состояний. Если это дискретное распределение вероятностей задано набором вероятностей $[p_1, \dots, p_k, \dots, p_n]$, то по критерию Байеса стратегия s_i предпочтительнее s_j $(s_i > s_j)$, если

$$\sum_k a_{ik} p_k > \sum_k a_{jk} p_k.$$

Таким образом, как в случае критерия Лапласа, выбор производится на основе максимизации ожидаемой величины, соответствующей заданному распределению,которое здесь уже не предполагается равномерным. Конечно, применение критерия Байеса ограничивается тем, что распределение вероятностей предполагается заранее известным.

Критерий Ходжеса — Лемана. При реализации этого критерия используются два субъективных показателя: во-первых, распределение вероятностей, используемое в критерии Байеса, во-вторых, “параметр оптимизма” из критерия Гурвица:

$$s_i > s_j, \text{ если } \lambda \sum_k a_{ik} p_k + (1-\lambda) \min_k a_{ik} >$$
$$> \lambda \sum_k a_{jk} p_k + (1-\lambda) \min_k a_{jk}, \quad 0 \le \lambda \le 1.$$

Частными случаями этого критерия являются критерий Байеса (при $\lambda = 1$) и критерий Вальда (при $\lambda = 0$).

Недостатком этого критерия является то, что в нем используется много субъективных факторов.

Критерий Кофмана опирается на понятия “неудача” и “успех”. Результат меньший, чем p_1, объявляется “неудачей”, а больший, чем p_2, оценивается как “успех” (p_1 и p_2 — субъективные параметры). Вероятность неудачи оценивается в $\alpha \cdot 100\%$, вероятность успеха — в $\gamma \cdot 100\%$. Это тоже субъективные параметры. Таким образом, в этом критерии используется четыре субъективных параметра:

$$s_i > s_j, \quad \text{если} \quad \alpha q_i^- + \beta q_i^0 + \gamma q_i^+ > \alpha q_j^- + \beta q_j^0 + \gamma q_j^+,$$

где

$$\begin{gathered}\beta = 1 - \alpha - \gamma,\\ q_k^- = \underset{r}{M}\{a_{kr} : a_{kr} < p_1\},\\ q_k^0 = \underset{r}{M}\{a_{kr} : p_1 \leq a_{kr} \leq p_2\},\\ q_k^+ = \underset{r}{M}\{a_{kr} : a_{kr} > p_2\}.\end{gathered}$$

Итак, рассмотрим матричную игру. Каждая допустимая, но не равновесная стратегия может быть названа *рисковой стратегией.* Участник идет на риск в надежде получить относительно большую прибыль (прибыль, превышающую цену игры); принимает такое решение, следствием которого может быть выигрыш, меньший равновесного значения.

Естественно, в игре с противником, последовательно применяющим оптимальную равновесную стратегию, рисковую стратегию применять не целесообразно, потому что поступая так, можно только проиграть.

Вместе с тем против игрока, осуществляющего также рисковую тактику, уже стоит использовать возможности отхода от равновесной стратегии. Это вытекает из самого определения равновесной стратегии. Прежде чем приступить к описанию применения рисковой стратегии в матричной игре, следует привести определения понятий, которые мы в дальнейшем будем также использовать. Это понятия типичной прибыли и типичного ущерба (не следует смешивать со средней прибылью и средним ущербом). Пусть матрица игры имеет вид

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} q_1 & q_2 & q_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_1 \\ s_3 \end{array} & \begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1. \end{pmatrix} \end{array}$$

Вводимые понятия поясним на примере. Назовем *типичным ущербом* $T_у$ максимально возможный размер ущерба, а *типичной прибылью* $T_п$ — максимально возможный размер прибыли. Нетрудно проверить, что равновесная стратегия для нашей матрицы игры обеспечивает результат, равный нулю:

$$\min_k \max_i a_{ik} = \max_i \min_k a_{ik} = 0.$$

Таким образом, если первый игрок применяет стратегию s_1, то

$$T_п = 5 - 0 = 5,$$

$$T_у = 0 - (-4) = 4.$$

Следовательно, коэффициент риска вида

$$r = T_у / T_п$$

стратегии s_1 первого игрока

$$r = 4/5 = 0,80.$$

Множество стратегий первого игрока, для которых коэффициент риска r меньше или равен r_1, будем называть *множеством допустимых стратегий* и обозначать символом $\delta(I; r_1)$. Итак, имеем

$$\delta(I; 0) = \{s_3\},$$

$$\delta(I; 0,33) = \{s_2, s_3\},$$

$$\delta(I; 0,5) = \{s_2, s_3\},$$

$$\delta(I; 0,8) = \{s_1, s_2, s_3\} = s.$$

Здесь символ s означает пространство всех стратегий первого игрока. Минимальную величину r_5, для которой множество допустимых стратегий совпадает с пространством всех стратегий, будем называть *рисковым максимумом* множества стратегий первого игрока и обозначать $R_s^{\max}$. В данном случае рисковый максимум множества стратегий первого игрока равен

$$R_s^{\max} = 0,80.$$

Допустимые стратегии δ второго игрока:

$$\delta(II; 0) = \{q_2\},$$

$$\delta(II; 0,7) = \{q_2\},$$

$$\delta(II; 0,75) = \{q_1, q_2\},$$

$$\delta(II; 5,0) = \{q_1, q_2, q_3\} = q$$

(q — пространство всех стратегий второго игрока). Рисковый максимум множества стратегий второго игрока

$$R_q^{\max} = 5,00.$$

Очевидно, что так как значение коэффициента риска r для оптимальной чистой стратегии равно 0, то оптимальная чистая стратегия будет принадлежать множеству допустимых стратегий. Рисковый минимум данного множества стратегий можно определить следующим образом: это — минимальная величина r, при которой множество допустимых стратегий будет состоять по крайней мере из двух элементов. Обозначим рисковый минимум через $R^{\min}$. Тогда для нашего случая

$$R_s^{\min} = 0,33,$$

$$R_q^{\min} = 0,75.$$

Величина $R^{\min}$ дает информацию о возможностях пойти на риск, а $R^{\max}$ — о пределах этих возможностей.

5. Анализ риска с помощью функции полезности

В разд. 2 мы обсуждали роль функции полезности при анализе рисков. Теперь, используя эту функцию, наметим подходы к сопоставлению полезности случайных и детерминированных величин.

Пусть x — инвестиции (вложения) в проект, $U(x)$ — степень (функция) полезности этих вложений. Полезность инвестиций x можно измерять по-разному:

- как внутреннюю норму дохода IRR проекта с инвестициями x;

- чистую приведенную стоимость NPV проекта после вложений x;

- приращение после дополнительных инвестиций x абсолютной прибыли совокупного (глобального) проекта;

- приращение после вложений x нормы прибыли глобального проекта;

- степень достижения какой-либо цели в зависимости от вложений x.

Внутренняя ставка дохода показывает степень рентабельности проекта. При ставке дисконтирования, равной внутренней ставке дохода, чистая приведенная стоимость проекта NPV [17] обращается в нуль. Внутренняя ставка дохода и чистая приведенная стоимость представляют собой взаимно дополняющие, а не исключающие критерии: внутренняя ставка дохода показывает норму прибыли, чистая приведенная стоимость — абсолютную величину прибыли. Так, если имеются два проекта A и B и с начальными инвестициями $I_A \neq I_B$, то вполне может оказаться, что проект A имеет большую норму прибыли — большую внутреннюю ставку дохода, а проект B дает большую абсолютную прибыль — имеет большую чистую приведенную стоимость.

Функция полезности $U(x)$ показывает степень выгодности какого-либо варианта вложений в объеме x, например, как чистую приведенную стоимость или как норму рентабельности проекта.

Типичная зависимость полезности от объема вложенных средств такова. При малых x каждое новое дополнительное вложение расширяет возможности инвестора, поэтому вначале полезность вложений x растет сверхлинейно (по x):

$$U(x+1) > U(x) + U(1).$$

При больших значениях x каждое дополнительное вложение уже не влияет столь значительно на результат, возможности инвестиций реализуются в порядке убывающей отдачи от вложений. Таким образом, при больших значениях x полезность вложений растет менее, чем линейно по x:

$$U(x+1) < U(x) + U(1).$$

При средних значениях вложений x функция полезности может возрастать линейно по x:

$$U(x+1) = U(x) + U(1). \tag{5.1}$$

Сверхлинейный, линейный или более медленный, чем линейный, рост функции полезности по величине вложений x может быть использован для выяснения степени отношения к риску.

Будем говорить, что *инвестор A избегает риска,* если его функция полезности U_A отражает предпочтение детерминированной величины полезности по отношению к случайной величине с тем же математическим ожиданием. Математически это выражается следующим образом:

$$U_A(\sum_{i=1}^{n} p_i x^{(i)}) > \sum_{i=1}^{n} p_i U_A(x^{(i)}), \tag{5.2}$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1; \quad p_i \geq 0; \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.3}$$

Функция $U_A(x)$, удовлетворяющая условиям (**??**), (**??**), называется вогнутой. Вогнутая функция полезности, изображенная на рис. 6, описывает *предпочтения лица, избегающего риска.* Такая функция полезности соответствует уменьшающейся отдаче на вложения x. Для вогнутой функции полезности справедливо свойство: отрезок, соединяющий две точки графика функции, соответствующие, например, значениям $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$, находится под графиком (см. рис. 6).

Множители p_i можно интерпретировать как вероятности возникновения ситуаций $x^{(i)}$. В этом случае $U_A(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i x^{(i)})$ — полезность детерминированной величины $M(x)$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} p_i x^{(i)},$$

а $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i U_A(x^{(i)})$ — ожидаемая полезность случайной величины x:

$$M(U_A(x)) = \sum_{i=1}^{n} p_i U_A(x^{(i)}). \tag{5.4}$$

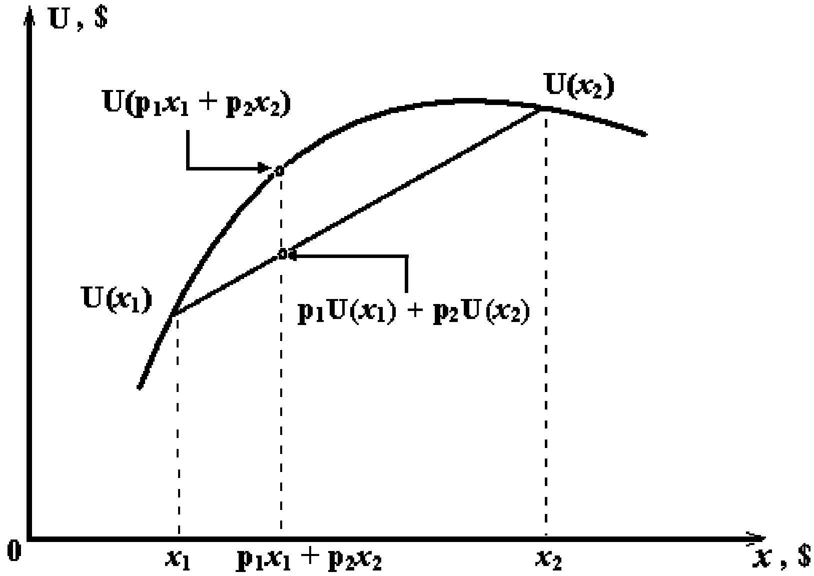

Рис.6. Вогнутая функция полезности

Из формулы (??) следует неравенство

$$U_A(M(x)) > M(U_A(x)),$$

т.е. детерминированная величина $M(x)$ предпочтительнее случайной величины x. Более того, величина

$$\Phi_A = U_A(M(x)) - M(U_A(x)) \tag{5.5}$$

или

$$\Phi_A = U_A(\sum_{i=1}^{n} p_i x^{(i)}) - \sum_{i=1}^{n} p_i U_A(x^{(i)}) \tag{5.6}$$

может трактоваться как премия, которую готов платить инвестор за то, чтобы застраховаться от случайного характера величины x и иметь дело с $M(x)$.

Иными словами, величина Φ_A — *премия за риск*: такую величину необходимо доплатить к случайной величине x, чтобы уравнять ее по степени полезности с детерминированным вариантом $M(x)$. Премия за риск — доплата к случайной величине, делающая ее одинаково привлекательной с детерминированной.

Назовем инвестора B *нейтральным к риску,* если случайная и детерминированная величины полезности с одинаковым математическим ожиданием для него одинаково привлекательны. Математически это выражается следующим образом (см. также (**??**), (**??**)):

$$U_B(\sum_{i=1}^{n} p_i x^{(i)}) = \sum_{i=1}^{n} p_i U_B(x^{(i)}), \tag{5.7}$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1; \quad p_i \geq 0; \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.8}$$

Это линейная функция полезности. Она описывает предпочтения нейтрального к риску лица, а также ситуации, в которых возврат, например прибыли, линейно зависит от вложенных в проекты средств. Как известно, для линейной функции отрезок, соединяющий две точки графика, находится на графике функции.

Будем говорить, что лицо C *склонно к риску,* если для него детерминированная величина менее предпочтительна, чем случайная с тем же самым математическим ожиданием. Математически это выражается следующим образом:

$$U_C(\sum_{i=1}^{n} p_i x^{(i)}) < \sum_{i=1}^{n} p_i U_C(x^{(i)}), \tag{5.9}$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1; \quad p_i \geq 0; \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.10}$$

Функция полезности $U_C(x)$, удовлетворяющая условиям (**??**), (**??**), называется выпуклой. Выпуклая функция полезности описывает предпочтения склонного к риску инвестора, а также ситуации, в которых возврат, например прибыль, растет сверхлинейно по отношению к вложениям x в проекты. Характерной чертой выпуклых функций является то, что отрезок, соединяющий две точки графика функции полезности, находится над графиком. Здесь случайная величина x с математическим ожиданием $M(x)$ предпочтительнее для лица C, чем детерминированная величина $M(x)$. Разность

$$\Phi_C = \sum_{i=1}^{n} p_i U_C(x^{(i)}) - U_C(\sum_{i=1}^{n} p_i x^{(i)})$$

показывает, насколько больше приносит лицу C случайный вариант, чем детерминированный.

Предприятие, работая на сложных турбулентных рынках наукоемкой продукции, получает дополнительную прибыль, которая образуется в результате инновационной деятельности, направленной на производство новых товаров, товаров с новыми свойствами и качествами. Вместе с тем желание получить дополнительную прибыль влечет за собой и дополнительный риск, например обусловленный возможными ошибками в прогнозировании поведения потребителей. Дополнительная прибыль приводит к росту спроса на акции предприятия, ошибки — к его уменьшению.

Большинство людей избегает риска, поэтому реальная стоимость акции x часто меньше, чем стоимость дисконтированного потока дивидендов $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{c_i}{(1+q)^i}$ на величину, пропорциональную разбросу (неопределенности) дисконтированной стоимости дивидендов:

$$x = M(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{c_i}{(1+q)^i}) - \gamma\sigma(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{c_i}{(1+q)^i}).$$

Здесь символ c_i означает дивиденды в момент i, q — процентная ставка (ставка дисконтирования). Вводя, как и ранее, приведенную стоимость потока платежей c_i

$$NPV_c = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{c_i}{(1+q)^i},$$

для оценки *реальной стоимости акций* получаем выражение

$$x = NPV_c - \gamma(\sigma(NPV_c)), \tag{5.11}$$

где $\gamma(\sigma(NPV_c))$ — величина премии за риск в зависимости от степени неопределенности.

В качестве примера функции полезности рассмотрим чистую приведенную стоимость доходов от проекта по производству некоторого нового продукта (табл.3).

Таблица 3: Значения функции полезности

Аргумент x (\$)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
Функция полезности $U(x)$ (\$)	23	67	169	415	760	1101	1341	1431	1469	1500

Из рис. 7 видно, что функция полезности является выпуклой при $x < 450$; примерно линейной при $450 < x < 550$ и вогнутой при $x > 550$.

Сравним случайную величину, в которой x принимает с одинаковыми вероятностями $0,5$ значения 200 и 400, с детерминированной величиной 300. Математическое ожидание случайной величины есть

$$0,5 \cdot 200 + 0,5 \cdot 400 = 300.$$

Ее оптимальная полезность равна

$$0,5 \cdot U(200) + 0,5 \cdot U(400) = 0,5 \cdot 71 + 0,5403 = 272.$$

В то же время полезность детерминированной величины в 300 такова:

$$U(300) = 179.$$

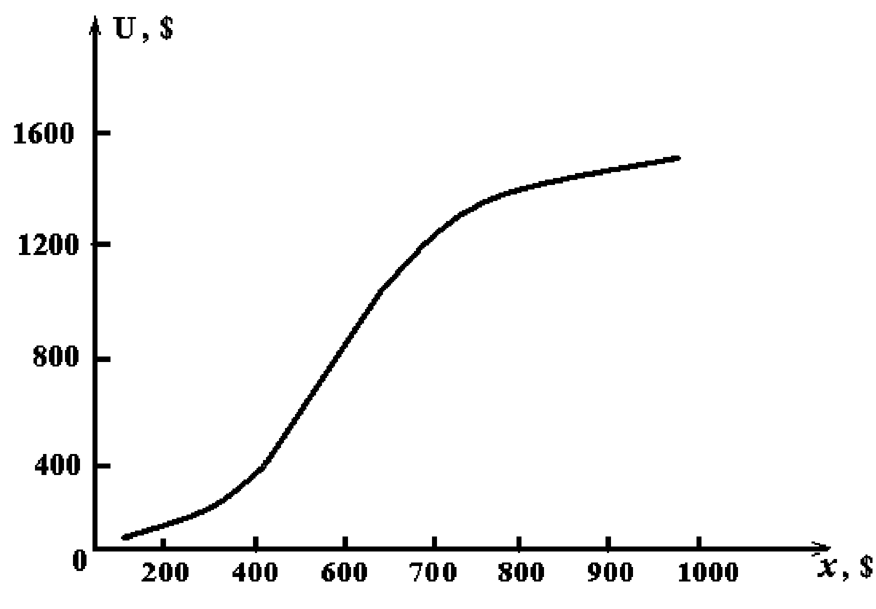

Рис.7. Пример функции полезности

Предпочитая случайную величину детерминированной, инвестор выигрывает:

$$272 - 179 = 43.$$

Рассмотрим функцию $U(x)$ на интервале $x > 550$. Сравним детерминированную величину $x = 800$ со случайной величиной, принимающей значение 600 с вероятностью 1/3 и значение 900 с вероятностью 2/3. Математическое ожидание случайной величины

$$\frac{1}{3}600 + \frac{2}{3}900 = 800$$

такое же, как и ожидание детерминированной величины. В то же время полезность детерминированной величины

$$U(800) = 1429.$$

6. Финансовый анализ в условиях риска и неопределенности

В процессе составления портфеля финансовых активов или портфеля мероприятий, направленных на получение финансовой прибыли (проектов, заказов, инвестиций), обычно преследуется цель — получить максимальный доход при минимальном риске. Однако стремление получить высокий доход обычно сопряжено с высоким риском. Теория портфеля позволяет находить рациональные компромиссы между ожидаемым доходом и риском финансовых операций.

Начало формирования теории портфеля связывают с работой Г.Марковица [**??**], впоследствии награжденного Нобелевской премией за свои результаты в этой области. Названная теория была развита для портфелей ценных бумаг, поскольку вложения в ценные бумаги можно теоретически рассматривать как бесконечно делимые,что упрощает построения, а богатая статистика позволяет достаточно точно аппроксимировать вероятностные характеристики этих финансовых инструментов. Дальнейшее изложение также относится в основном к портфелю ценных бумаг.

Пусть рассматривается набор из N видов ценных бумаг, причем доходность (норма дохода) ценной бумаги i-го вида описывается *случайной величиной* r_i . Портфель мы ассоциируем с N - мерным вектором y, каждая компонента которого $y_i \geq 0$ соответствует доле содержания ценных бумаг i-го вида (в их денежном выражении) в портфеле: $\sum\limits_{i=1}^{N} y_i = 1$. Ожидаемая (средняя) доходность портфеля находится по формуле

$$M_p = \sum_{i=1}^{N} y_i x_i. \tag{6.1}$$

Здесь $x_i = M(r_i)$ – математическое ожидание (ожидаемое значение) доходности бумаги i-го вида . Как правило, доходность измеряется в долях единицы или в процентах (числу 0,1 соответствует 10 % , 0,25 – 25 % и т.д.) .

Ожидаемый разброс, отклонение доходности портфеля от среднего значения находится как среднеквадратичное отклонение σ_p:

$$\sigma_p^2 = M(\sum_{i=1}^{N} y_i r_i - M_p))^2.$$

Можно указать другое выражение для вычисления σ_p^2:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} y_i y_j \sigma(r_i)\sigma(r_j)\operatorname{cor}(r_i, r_j). \tag{6.2}$$

Здесь символ $\operatorname{cor}(x_i, x_j)$ означает коэффициент корреляции между величинами r_i и r_j, а символ σ_p^2 — дисперсию. Если портфель состоит из некоррелированных между собой ценных бумаг, то для разброса доходности портфеля справедлива следующая формула:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i^2 \sigma_i^2(r_i).$$

Величина σ_p — среднеквадратичное или стандартное отклонение — показывает меру отклонения доходности портфеля от ее среднего значения. Эта величина σ_p, называемая иногда *степенью неопределенности*, и трактуется в рамках излагаемого подхода как *риск портфеля*, она измеряется в тех же единицах, что и доходность.

Мы уже знаем (например, в соответствии с формулой (**??**)), что стоимость (полезность) некоторого финансового результата, который характеризуется случайной величиной, может быть оценена как ее среднее значение, скорректированное с учетом премии за риск. В связи с этим стоимость портфеля можно оценить с помощью параметров M_p и σ_p. Эти параметры являются ключевыми в теории портфеля.

Приведем пример расчета ожидаемой доходности и риска портфеля, состоящего из двух видов ценных бумаг. Предположим, что ожидаемые доходности x_A акций A и

x_B — акций B равны 20 и 40% соответственно; $\sigma_A = 10\%$, $\sigma_B = 50\%$. Рассмотрим портфель, состоящий из $y \cdot 100\%$ акций B и $(1-y) \cdot 100\%$ акций A. Интерес представляет взаимосвязь доходности портфеля и риска при разных долях акций A и B, в частности возможность минимизации риска путем рационального формирования портфеля. Результаты расчетов приведены в табл. 4 и на рис. 8. В каждой строке таблицы показаны значения риска портфеля σ_p, отвечающие соответствующей корреляции и доходности.

Ожидаемая доходность портфеля рассчитана по формуле (**??**)

$$\mu = M_p(y) = yM_B + (1-y)M_A = y \cdot 40 + (1-y) \cdot 20.$$

Риск портфеля σ_p найден в соответствии с равенством (**??**)

$$\sigma_p = \sqrt{y^2\sigma_A^2 + (1-y)^2\sigma_B^2 + 2y(1-y)\sigma_A\sigma_B \operatorname{cor}(r_A, r_B)},$$

где $\operatorname{cor}(r_A, r_B)$ — корреляция доходностей акций A и B, $\operatorname{cor}(r_A, r_B) = \dfrac{\operatorname{cov}(r_A, r_B)}{\sigma_A\sigma_B}$;
$\operatorname{cov}(r_A, r_B) = M[(r_A - x_A)(r_B - x_B)]$.

Таблица 4: Стандартные отклонения доходности портфеля

($)

cor(A,B)	Доля акций B, % (y)											
	0	10	17	20	30	40	50	60	70	80	90	100
	Доходность портфеля $(M_p(y))$											
	20	22	23,40	24	26	28	30	32	34	36	38	40
−1	10	4	0,20	2	8	14	20	26	32	38	44	50
−0,8	10	5,83	5,32	6	10,30	15,62	21,21	26,91	32,65	38,42	44,20	50
−0,6	10	7,21	7,52	8,25	12,17	17,09	22,36	27,78	33,29	38,83	44,41	50
−0,4	10	8,37	9,20	10	13,78	18,44	23,45	28,64	33,91	39,24	44,61	50
−0,2	10	9,38	10,63	11,49	15,23	19,70	24,49	29,46	34,53	39,65	44,81	50
0	10	10,30	11,88	12,81	16,55	20,88	25,50	30,27	35,13	40,05	45,01	50
0,2	10	11,14	13,01	14	17,78	22	26,46	31,05	35,72	40,45	45,21	50
0,4	10	11,92	14,06	15,10	18,92	23,07	27,39	31,81	36,30	40,84	45,41	50
0,6	10	12,65	15,03	16,12	20	24,08	28,28	32,56	36,88	41,23	45,61	50
0,8	10	13,34	15,94	17,09	21,02	25,06	29,15	33,29	37,44	41,62	45,80	50
1	10	14	16,80	18	22	26	30	34	38	42	46	50

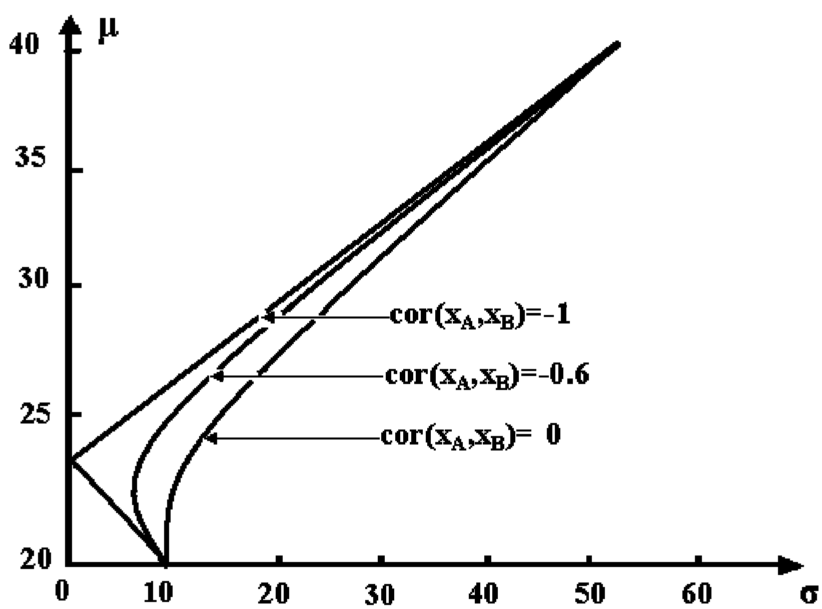

Рис.8. Доходность портфеля в зависимости от риска и корреляции

Для оценки степени неопределенности дохода рассмотрим следующие варианты:

- вложение денег в безрисковые активы (облигации, банковский счет), имеющие доходность r_0;
- вложение денег в портфель из рисковых активов (например, акций), имеющий ожидаемую доходность x_p;
- вложение денег в портфель, содержащий одновременно и безрисковые активы, и рисковые.

Первая возможность является простой, и в контексте проводимых построений не заслуживает отдельного анализа. В финансовой математике обычно предполагается, что существует возможность хранить деньги на банковском счете или в виде государственных ценных бумаг, причем доходность таких вложений задана и одна и та же для всех участников. Детальное рассмотрение вопросов, связанных с анализом ставок по кредитам и депозитам, а также доходности облигаций, выходит за рамки настоящего пособия.

При второй возможности исследуются портфели, имеющие минимальное значение риска σ_p при заданной доходности $x_p = \mu$. Такие портфели p^* определяются равенством

$$\sigma_{p^*}(\mu) = \min\{\sigma_p \mid x_p = \mu\},$$

где минимум вычисляется по всем допустимым портфелям p . Для упрощения обозначений положим $\sigma^*(\mu) = \sigma_{p^*}(\mu)$.

В случае, когда дополнительных ограничений на допустимые портфели нет, задача нахождения зависимости

$\sigma = \sigma^*(\mu)$ имеет явное решение [??,??]. Ее можно сформулировать в форме задачи математического программирования:

найти

$$\min_y \sqrt{y^T V y} \tag{6.3}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = 1, \tag{6.4}$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_i x_i = \mu. \tag{6.5}$$

Здесь V – матрица ковариаций, ее элементы $\sigma_{ij} = \mathrm{cov}(r_i, r_j)$ – ковариации случайных величин r_i и r_j $(i, j = 1, 2, \ldots, N)$; символ T означает операцию транспонирования вектора.

При некоторых дополнительных технических ограничениях задача (??) – (??) имеет решение следующего вида:

$$y_* = \varphi \cdot \mu + \psi;$$
$$\sigma^*(\mu) = \sqrt{y_*^T V y_*} = \sqrt{a\mu^2 + b\mu + c},$$

где $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$, φ и ψ – фиксированные векторы, определяемые по параметрам задачи и не зависящие от μ.

График функции $\sigma^*(\mu)$ представляет собой гиперболу, которая, как и в случае двух акций, имеет вид, представленный на рис. 8-9.

Верхняя ветвь гиперболы соответствует так называемым *эффективным* или *недоминируемым* портфелям.

Каждый такой портфель характеризуется тем, что у любого портфеля с иными характеристиками риска и доходности либо доходность меньше, либо риск больше (либо то и другое одновременно).

Третья возможность составления портфеля и оценки риска – портфель из акций и безрисковых активов. Этот вариант постановки задачи был рассмотрен Дж.Тобином [??]. Здесь портфель ассоциируется уже с $N+1$-мерным вектором $\hat{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y \end{pmatrix}$, первая компонента которого – доля капитала, вкладываемого по ставке r_0 без риска. Ожидаемая доходность такого портфеля имеет вид

$$x_p = y_0 r_0 + \sum_{i=1}^{N} y_i x_i, \tag{6.6}$$

а выражение для риска формально остается тем же самым: $\sigma_{\hat{y}} = \sqrt{y^T V y}$.

Задача на отыскание портфеля с минимальным риском $\sigma^*(\mu)$ при фиксированной ожидаемой доходности μ формулируется совершенно аналогично задаче (??) – (??), с необходимой модификацией соотношения (??) в соответствии с новым выражением для доходности (??).

Введение новой переменной y_0 только упрощает решение задачи, и мы можем привести ответ полностью.

Зависимость $\sigma = \sigma^*(\mu)$ минимально возможного риска от доходности μ здесь имеет простой вид:

$$\sigma = \frac{\mu - r_0}{g}, \tag{6.7}$$

где $g = \sqrt{(x - r_0 e)^T V^{-1} (x - r_0 e)}$; e – вектор, у которого все компоненты равны 1, а x – вектор, составленный из доходностей рисковых активов.

Эффективные портфели определяются равенствами

$$y^* = \frac{\mu - r_o}{g^2} V^{-1}(x - r_0 e), \quad y_0^* = 1 - y^T e. \tag{6.8}$$

Таким образом, зависимость риска и доходности для эффективных портфелей – линейная, а сами портфели обладают важным свойством: структура рисковой части y^* для всех таких портфелей одна и та же. Различие определяется лишь скалярным множителем $(\mu - r_0)$, который и характеризует склонность инвестора к риску: большим значениям μ соответствует и большая доходность и большой риск одновременно. Геометрически эффективным портфелям на плоскости (σ, μ) соответствует прямая линия (рис. 9).

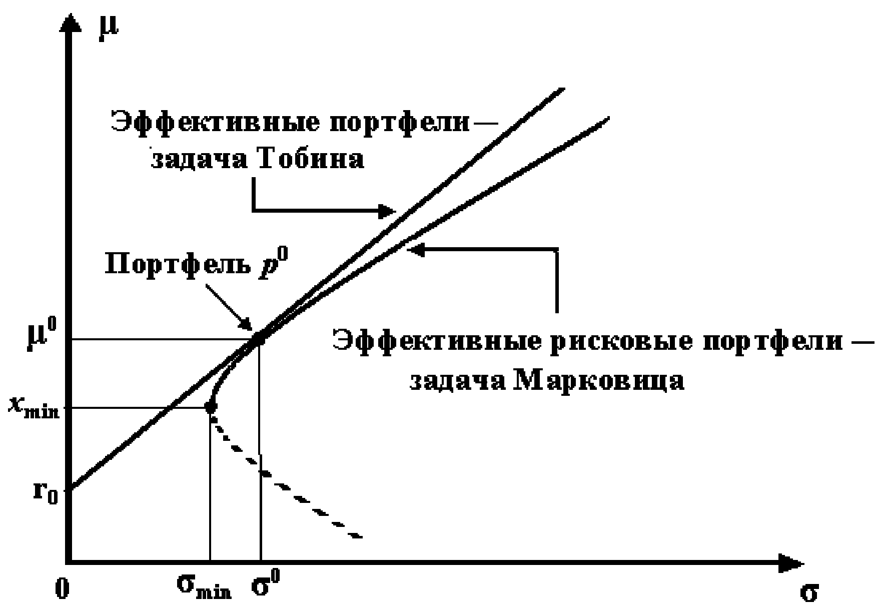

Рис.9. Эффективные портфели рисковых активов и с учетом возможности безрисковых вложений

Можно показать также, что один из эффективных портфелей в задаче Тобина является таковым и для задачи Марковица. Это портфель, содержащий нулевую безрисковую часть. Таким образом, прямая, соответствующая решениям задачи Тобина, является касательной к гиперболе, соответствующей эффективным портфелям чисто рисковых активов.

Разность $x_p - r_0$ между доходностью x_p рискового портфеля и доходностью безрисковых ценных бумаг r_0 называется *дополнительной доходностью* или *премией за риск*. Эту величину можно использовать как для портфелей, составленных только для рисковых активов, так и для портфелей с безрисковой частью.

Рассмотрим отношение премии за риск $x_p - r_0$ портфеля к степени неопределенности σ_p

$$\gamma_p = \frac{x_p - r_0}{\sigma_p}.$$

Эту величину называют *удельной премией за риск* или коэффициентом Шарпа для данного портфеля. Можно показать, что портфель p^0 с максимальным коэффициентом Шарпа — это один из эффективных портфелей в задаче Марковица. Он находится как решение следующей задачи.

Найти

$$\gamma^0 = \max\{\gamma_p | p\},$$

где максимум снова вычисляется по всевозможным портфелям p.

Обозначим через σ^0 и μ^0 значения риска и доходности портфеля p^0.

В таком случае

$$\gamma^0 = \frac{\mu^0 - r_0}{\sigma^0} \tag{6.9}$$

и

$$\mu^0 = r_0 + \gamma^0 \sigma^0.$$

Портфель из рисковых активов с максимальным коэффициентом Шарпа иногда называют *оптимальным.* Оптимальность портфеля здесь состоит в том, что риск компенсируется по максимально возможной ставке доходности.

Свойство оптимальности можно также пояснить следующим образом. Рассмотрим портфель, в котором долю y составляют безрисковые ценные бумаги с гарантированной доходностью r_0, а доля $1-y$ вложена в оптимальный портфель рисковых активов p^0 . Ожидаемая доходность нового портфеля будет равна

$$x_p = yr_0 + (1-y)\mu^0,$$

а степень неопределенности (риск) —

$$\sigma_p = (1-y)\sigma^0. \tag{6.10}$$

Для нового портфеля отношение дополнительной доходности к степени неопределенности определится равенством

$$\gamma_p = \frac{yr_0 + (1-y)\mu^0 - r_0}{(1-y)\sigma^0} =$$

$$= \frac{(1-y)\mu^0 - (1-y)r_0}{(1-y)\sigma^0}$$

или

$$\gamma_p = \frac{\mu^0 - r_0}{\sigma^0} = \gamma^0.$$

Таким образом, оптимальное отношение дополнительной доходности к неопределенности является постоянным и не зависит от степени неопределенности. Последнее равенство отражает тот факт, что эффективным портфелям, содержащим рисковую и безрисковую часть (решениям задачи Тобина) на плоскости риск-доходность соответствует прямая. Тангенс угла наклона этой прямой к оси σ равен γ^0, что свидетельствует о том, что данная прямая является касательной к кривой, отвечающей эффективным чисто рисковым портфелям, а оптимальный портфель — это тот самый портфель, который является эффективным одновременно и для задачи Марковица, и для задачи Тобина. Заметим, что отрицательным y соответствует взятие денег в кредит под процент r_0 и приобретение на эти деньги бумаг рискового портфеля.

Конкретизируем ситуацию, придав параметрам числовые значения. Пусть имеются безрисковые облигации с доходностью 10% ; акции A и B, имеющие доходности $x_A = 15\%$ и $x_B = 30\%$ и риски $\sigma_A = 10\%$, $\sigma_B = 40\%$ соответственно. Для коэффициента корреляции положим $\mathrm{cor}(A, B) = -0,6$.

Найдем оптимальный портфель из акций A и B и удельную премию за риск γ^0. Акции A и B имеют отрицательный коэффициент корреляции. Кроме того, доходность акций B больше, чем доходность акций A. Будем, начиная с портфеля, состоящего из 100% акций A, постепенно увеличивать долю акций B. Результаты вычислений параметров портфеля приведены в табл. 5 . Можно заметить, что доходность портфеля при этом увеличивается, а риск до определенного момента уменьшается. Последнее обстоятельство обусловлено отрицательной корреляцией доходностей активов.

Однако ввиду больших риска и доходности акций B по сравнению с акциями A, рост доходности портфеля, начиная с некоторой точки, будет происходить за счет риска. По этим причинам кривая, отражающая связь доходности и риска портфеля, имеет загиб (рис. 10) в сторону оси ординат, соединяя точки $A(\sigma_A, x_A)$ и $B(\sigma_B, x_B)$. Данное обстоятельство, впрочем, вполне согласуется с общей теорией. Построенная кривая является частью гиперболы, портфелю из акций A отвечает точка на ее нижней ветви, а портфелю из акций B — на верхней.

Таблица 5: Величины доходности и риска портфеля из акций A и B

(%)

Показатель	Доля акций B в портфеле, %											
	0	10	17	20	25	30	40	50	60	70	80	100
Риск σ_p	10	$7,33$	$6,88$	$7,16$	$8,14$	$9,60$	$13,30$	$17,46$	$21,84$	$26,31$	$30,84$	40
Доходность x_p	15	$16,50$	$17,55$	18	$18,75$	$19,50$	21	$22,50$	24	$25,50$	27	30

Точка (σ^0, μ^0), максимизирующая $\dfrac{x_p - r_0}{\sigma_p}$, дает риск и доходность оптимального портфеля из акций A и B. Среди значений в табл. 5 выбираем оптимальные риск и доходность портфеля. Они равны соответственно $6,88$, $17,55\%$. Оптимальный портфель состоит из 17% акций A

и 83% акций B (см. рис. 10). Решение получено простым перебором и является приближенным, поэтому целесообразно округлить $6,88$ до 7%, а $17,55$ — до 18%.

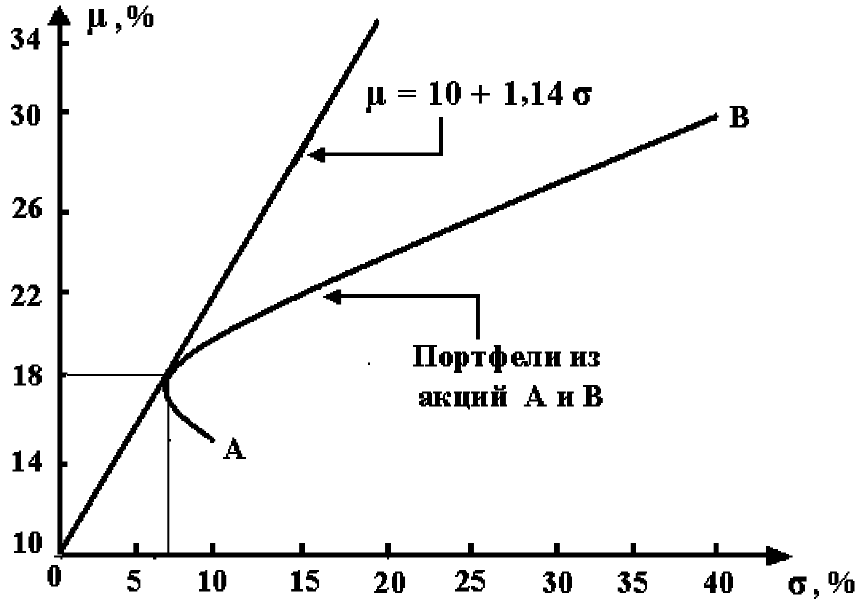

Рис.10. Эффективные портфели двух рисковых активов.

Риск портфеля ,%, рассчитывается по формуле (**??**):

$$\sigma_p = \sqrt{(1-y)^2\sigma_A^2 + y^2\sigma_B^2 + 2y(1-y)\sigma_A\sigma_B \operatorname{cor}(r_A, r_B)};$$

$$\sigma_p = \sqrt{(1-y)^2 \cdot 0,16 + y^2 \cdot 0,01 + 2y(1-y) \cdot (-0,024)}.$$

Ожидаемая доходность портфеля ,%, находится по формуле (**??**):

$$x_p = (1-y)x_A + yx_B = (1-y) \cdot 15\% + y \cdot 30\%.$$

Нетрудно сосчитать и удельную премию за риск оптимального портфеля:

$$\gamma^0 = \frac{18-10}{7} = 1,14.$$

Сформируем оптимальный портфель из акций и безрисковых облигаций, имеющий заданную доходность μ.

Облигации дают безрисковый доход по ставке r_0. Доля облигаций y в новом портфеле вычисляется на основе формулы

$$\mu = yr_0 + (1-y)\mu^0,$$

где μ^0 и σ^0 — доходность и риск оптимального портфеля из акций A и B. Выделяя из этой формулы долю безрисковых облигаций y, получаем

$$y = \frac{\mu^0 - \mu}{\mu^0 - r_0}, \tag{6.11}$$

где μ — заданная доходность нового оптимального портфеля из акций и облигаций. Риск σ оптимального портфеля с доходностью μ определяется формулой (**??**). При этом, если желаемая доходность μ больше чем доходность оптимального рискового портфеля μ^0, то доля y, определяемая формулой (**??**), становится отрицательной.

Сделаем небольшое отступление, касающееся допущения о том, что доли как рисковых, так и безрисковых активов могут принимать отрицательные значения. Отрицательные доли соответствуют так называемой *короткой позиции* по активам с такими долями.

Фактическое владение инвестором ценными бумагами называется длинной позицией (long position) по этим бумагам. Например, по фактически купленным акциям инвестор занимает длинную позицию (или сами бумаги находятся в длинной позиции). Контракт, по которому ценная бумага продана, и принято обязательство предоставить ее в будущем к определенной дате по заранее оговоренной цене, называется короткой позицией (short position). При этом в момент заключения сделки можно не иметь продаваемой бумаги.

Поясним смысл короткой позиции. Предположим, ожидается падение акций D, но у инвестора их нет. В этом случае можно заключить контракт о продаже определенного количества этих акций через через определенное время по теперешней цене $S_{0,D}$. Тем самым инвестор займет короткую позицию по акциям D. Если прогнозы оправдаются и стоимость акций снизится до $S_{1,D} < S_{0,D}$, то акции покупают по фактической цене $S_{1,D}$ и продают по оговоренной в контракте цене $S_{0,D}$. Разница составляет доход от сделки.

Если доля y, в формуле (**??**) отрицательна, облигации находятся в портфеле в короткой позиции: инвестор принял обязательство их продать в будущем, не имея их на руках или же занял под безрисковый процент соответствующую сумму денег. На вырученные от продажи деньги увеличивается объем оптимального портфеля из акций A и B. В новом оптимальном портфеле p^0 на $-y$ долей облигаций в короткой позиции приходится $1 - y$ долей бумаг портфеля p^0.

Проиллюстрируем сказанное на примере. Рассмотрим процедуру формирования эффективных портфелей, дающих 12 и 30% дохода, на основе исходных данных предыдущего примера. Согласно этому примеру, $\mu^0 = 17,55\%$, $\sigma^0 = 6,88\%$. Сформируем новый оптимальный портфель,содержащий безрисковую часть и имеющий доходность 12%. По формуле (**??**) этот портфель содержит,%, облигаций $\dfrac{12\%}{18\%} = 66,66$. Следовательно, на ценные бумаги портфеля p^0 остается,%: $100 - 66,66 = 33,34$. Эти соотношения определяют состав нового оптимального портфеля: $66,66\%$ облигаций, $\dfrac{18-12}{18} \cdot 17 = 5,67\%$ акций B и $\dfrac{18-12}{18} \cdot (100-17) = 27,67\%$ акций A. Новый эффективный портфель p^*_{new} имеет риск, рассчитываемый по формуле (**??**) и равный $7\% \cdot (1-0,67) = 2,31\%$.

Теперь перейдем к другому эффективному портфелю p^{**}_{new}, у которого доходность 30%. Согласно формуле (**??**) на каждые $\dfrac{30\% - 18\%}{18\%} = 0,67$ части *обязательств по облигациям* приходятся $1+0,67 = 1,67$ части ценных бумаг портфеля p^0. Эти соотношения определяют состав нового портфеля: на каждые $0,67$ части обязательств по облигациям приходятся: $(1+0,67) \cdot 0,17 = 0,28$ части акций B; $(1+0,67) \cdot 0,83 = 1,39$ части акций A. Иначе говоря, на каждые \$67 обязательств по облигациям портфель имеет \$28 в акциях B и \$139 в акциях A. Риск нового портфеля p^{**}_{new} рассчитывается по формуле (**??**) с $y = -0,67$: $7\% \cdot (1+0,67) = 11,69\%$.

Доходность любого эффективного портфеля, составленного как из рисковых, так и безрисковых активов, определяется равенством

$$x_p = r_0 + \gamma^0 \sigma_p, \tag{6.12}$$

где σ_p — степень неопределенности или риск портфеля; r_0 — безрисковая процентная ставка; γ^0 — удельная премия за риск оптимального портфеля p^0.

Удельную премию за риск часто называют индексом портфеля. Эта величина характеризует портфель и может рассматриваться как аналог широко известных индексов, таких как индексы Доу Джонса, индекс $S\&P500$, российский индекс РТС и др.

Модель ценообразования на рынке капитала CAPM. С конца шестидесятых годов прошлого века популярной становится инвестиционная теория, связанная с моделью оценки капитальных активов. Ее основы были заложены в работах У. Шарпа, Дж. Липтнера, Дж. Моссина [18-20]. Модель ценообразования на рынке капитала CAPM (Capital Assets Pricing Model) — модель, в основе которой лежат обсуждавшиеся выше соотношения, относящиеся к выбору оптимального или эффективного портфеля.

Модель формулируется для *идеального конкурентного рынка*, обладающего следующими основными свойствами:

- все участники рынка обладают полной и одинаковой информацией о доходностях доступных активов;
- все активы абсолютно ликвидны, инвесторы имеют возможность купить и продать,занять и дать в долг любое количество активов, при этом для безрисковых активов действует единая процентная ставка r_0;
- все инвесторы формируют свои портфели в соответствии с теорией Марковица-Тобина, т.е. выбирают эффективные портфели из рисковых и безрисковых активов.

Среди перечисленных свойств идеального конкурентного рынка последнее условие выглядит самым ограничительным, из-за него модель CAPM не без основания подвергалась серьезной критике. Однако основные выводы, получаемые на основе этой модели, находят практическое применение и подтверждаются статистически.

В условиях идеального конкурентного рынка все инвесторы имеют одну и ту же структуру рисковой части портфеля, которая совпадает со структурой оптимального чисто рискового портфеля p^0 . Отсюда простым логическим рассуждением выводится, что сам портфель p^0 не может быть ничем иным, как реально существующим рыночным портфелем, т.е. его доли — это доли всего обращающегося на рынке капитала, которые соответствуют суммарной стоимости акций определенного вида.

Последнее обстоятельство позволяет оценить характеристики риска и доходности портфеля p^0 без решения оптимизационной задачи, используя те или иные рыночные индексы. В качестве такого индекса берут, например, индекс $S\&P500$. Этот индекс содержит аккумулированную информацию об акциях пятиста крупнейших компаний и в значительной степени отражает поведение финансового рынка в целом.

Таким образом, оптимальный портфель p^0 для всех инвесторов один и тот же. В силу того , что это рыночный портфель, примем для него специальное обозначение — символ m, а характеристики его риска и доходности обозначим через σ_m и x_m соответственно.

Линия рынка капитала Capital Market Line — это прямая на плоскости (σ, μ), связывающая уровень риска σ с доходностью μ для эффективных портфелей в смысле задачи Тобина. В нашем случае — это рыночный портфель и, как отмечалось выше, те портфели, у которых структура рисковой части совпадает со структурой рыночного портфеля.

Уравнение линии рынка капитала с учетом принятых обозначений, получается путем преобразования формулы (**??**) с использованием соотношений (**??**) и (**??**):

$$\mu = r_0 + \frac{x_m - r_0}{\sigma_m}\sigma. \qquad (6.13)$$

Связь ожидаемой доходности отдельной бумаги с параметрами рыночного портфеля в равновесном состоянии рынка дает равенство

$$x_j = r_0 + \frac{x_m - r_0}{\sigma_m^2}\operatorname{cov}(r_j, r_m), \qquad (6.14)$$

где r_j — случайная доходность ценной бумаги; r_m — случайная доходность рыночного портфеля; $\operatorname{cov}(r_j, r_m)$ — коэффициент ковариации (линейной связи) доходностей рыночного портфеля и бумаги.

Равенство (**??**) можно вывести путем преобразования выражения $\operatorname{cov}(r_j, r_m)$ с учетом явного представления доходности r_m по формуле (**??**).

Введем коэффициент λ — отношение премии за риск (дополнительной доходности рыночного портфеля по сравнению с доходностью безрисковых вложений) к его риску:

$$\lambda = \frac{x_m - r_0}{\sigma_m^2}.$$

С учетом этого обозначения равенство (**??**) запишется в виде

$$x_j = r_0 + \lambda\operatorname{cov}(r_j, r_m). \qquad (6.15)$$

Если теперь на горизонтальной оси отложить точки $\text{cov}(r_j, r_m)$, отвечающие различным бумагам, то на плоскости $(\text{cov}(r_j, r_m), x_j)$ соответствующие точки будут располагаться на одной прямой. Эта прямая называется *линия бумаг* или Security Market Line. Уравнение (**??**)и соответствующий график отражают взаимосвязь доходности отдельной бумаги с доходностью рынка в целом.

Однако чаще используется другой способ представления указанной взаимосвязи. Для того чтобы его получить, перепишем равенство (**??**) в следующем виде:

$$x_j = r_0 + (x_m - r_0)\frac{\text{cov}(r_j, r_m)}{\sigma_m^2}.$$

Коэффициент $\dfrac{\text{cov}(r_j, r_m)}{\sigma_m^2}$ является характеристикой ценной бумаги и обозначается символом β:

$$\beta_j = \frac{\text{cov}(r_j, r_m)}{\sigma_m^2},$$

Равенство (**??**) принимает вид

$$x_j = r_0 + (x_m - r_0)\beta_j. \tag{6.16}$$

Соотношение (**??**) называется *основным уравнением модели CAPM*(см. рис.11).

Коэффициент бета (β) связывает доходность ценной бумаги с доходностью рынка. Для рыночного портфеля $\beta_m = 1$, поэтому уравнение (**??**) преобразуется в тождество

$$x_m = x_m.$$

Параметр β показывает, насколько изменения доходности отдельной бумаги следуют за изменениями доходности рынка. Этот параметр широко известен не только специалистам-теоретикам, но и широкому кругу практиков, работающих на финансовом рынке. Статистические оценки бета для большинства ценных бумаг регулярно публикуются в финансовой прессе, существует даже специальное издание Beta Book, выпускаемое одним из ведущих финансовых издательств.

Есть и специальная терминология, относящаяся к β-характеристике риска ценной бумаги. А именно: бумаги с бета, близкими к единице, называются нейтральными (neutral). Изменения их доходностей следуют за движениями рынка, соответственно риск, связанный с ними, близок к риску работы на всем рынке .

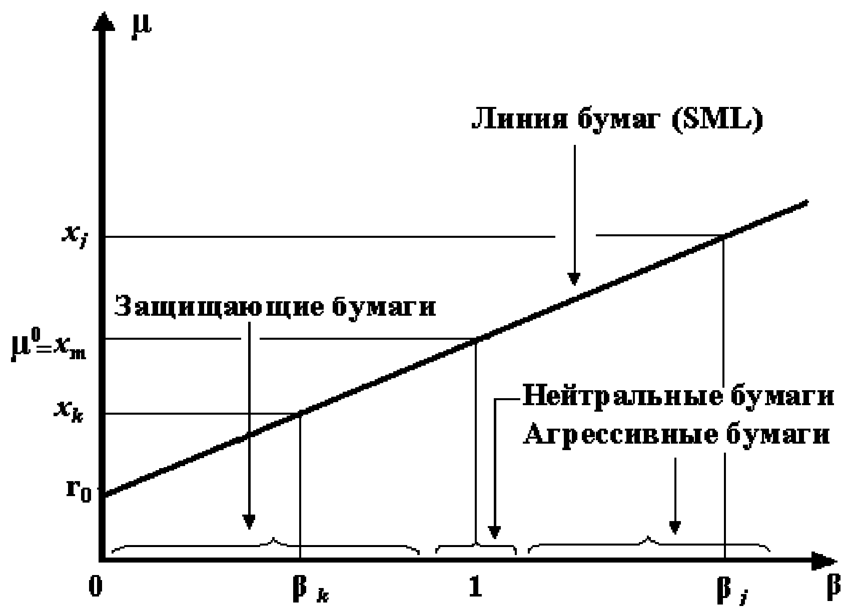

Рис. 11. Линия бумаг и бета-характеристика ценной бумаги

Бумаги с большими бета называются агрессивными (aggressive), при вложении средств в такие бумаги инвестор получает больший выигрыш по сравнению с рыночным, если рынок растет, однако и больший проигрыш, если рынок падает. Соответственно риск при работе с такими бумагами больше.

И наконец, при малых положительных бета бумаги называются безопасными и даже защищающими (defensive). Их корреляция с рынком весьма мала, они полезны в случае ожидаемого падения рынка.

Систематический и несистематический риск. При формировании портфеля инвесторы стремятся достичь максимальной доходности при минимальном риске (неопределенности). Возникает вопрос: насколько риск ценной бумаги может быть уменьшен за счет ее включения в подходящий портфель? Различают систематический и несистематический риски. *Систематический риск* (systematic risk) – это риск, не поддающийся диверсификации, присущий всем ценным бумагам данного вида, например акциям, облигациям. *Несистематический риск* (nonsystematic risk) — риск, который может быть диверсифицирован путем включения бумаги в портфель с другими ценными бумагами того же вида. *Диверсификация* (diversification) — уменьшение риска путем составления портфеля и перераспределения риска.

Ответ на вопрос о количественных оценках систематического и несистематического риска дает модель CAPM и формулы (**??**), (**??**), (**??**), связывающие степень неопределенности оптимального портфеля с уровнем его доходности. В общем виде формула для определения минимально возможного систематического риска — систематической неопределенности — такова:

$$\sigma_j^s = \beta_j \sigma_m,$$

где σ_m — неопределенность оптимального рыночного портфеля с доходностью x_m. Несистематический т.е. диверсифицируемый риск может быть найден из соотношения

$$\sigma_j^{ns} = \sigma_j - \beta_j \sigma_m.$$

С помощью составления оптимального портфеля можно свести риск к $\beta_j \sigma_m$. Дальнейшее уменьшение риска достигается только при уменьшении уровня доходности портфеля. Геометрически несистематическому риску соответствует расстояние от точки бумаги на плоскости риск-доходность до прямой CML по горизонтали, а систематическому — далее от CML до оси ординат (см. рис. 12).

Проиллюстрируем сказанное на примере. Пусть $\sigma_m = 30\%$, $x_m = 44\%$, $r_0 = 8\%$, $\beta_j = 0,89$, $\sigma_j = 50$, $x_j = 50\%$.

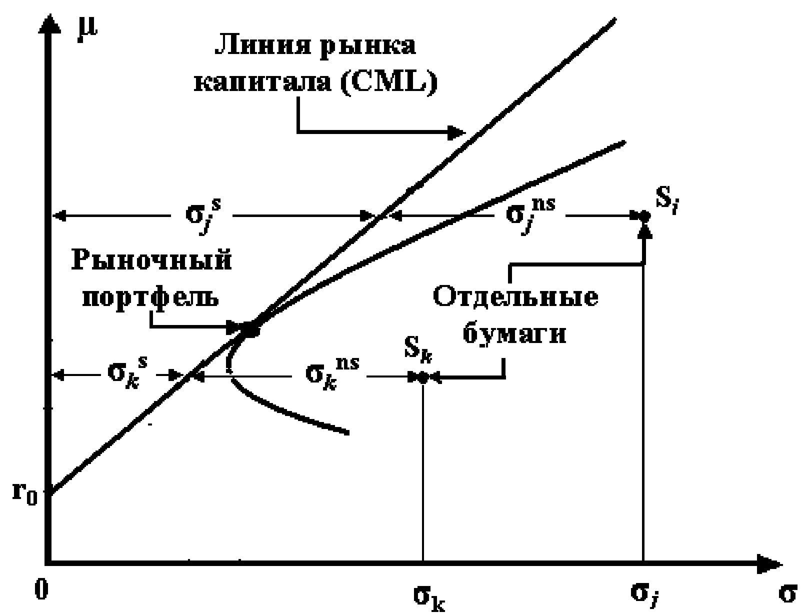

Рис. 12. Систематический σ_j^s, σ_k^s и диверсифицируемый $\sigma_j^{ns}, \sigma_k^{ns}$ риски

Тогда систематический риск

$$\sigma_j^s = \beta_j \sigma_m = 0,89 \cdot 30\% = 26,70\%,$$

диверсифицируемый риск

$$\sigma_j^{ns} = \sigma_j - \beta_j \sigma_m = 50\% - 0,89 \cdot 30\% = 23,30\%.$$

Угловой коэффициент λ для линии бумаг SML (уравнения (**??**), (**??**))

$$\lambda = \frac{x_m - r_0}{\sigma_m} = \frac{36\%}{30\%} = 1,2.$$

Уравнение линии бумаг

$$\mu = 8\% + 1,2\sigma^s = 8\% + 1,2\operatorname{cov}(x_j, x_m).$$

Цены активов в модели CAPM. Пусть P_{j^0} — сегодняшняя известная цена актива (ценной бумаги) ,а P_{j^1} — ее неопределенная будущая цена. Требуется установить связь между этими величинами и безрисковой процентной ставкой r_0.

Доходность ценной бумаги в простейшем случае

$$x_j = \frac{P_{j^1}}{P_{j^0}} - 1.$$

Применяя формулу (**??**), получим

$$M(\frac{P_{j^1}}{P_{j^0}} - 1) = r_0 + \lambda\operatorname{cov}(\frac{P_{j^1}}{P_{j^0}} - 1, x_m).$$

Заметим, что величина P_{j^0} — это уже известная сегодняшняя цена, поэтому не случайна, и кроме того, справедливо равенство $\operatorname{cov}(-1, x_m) = 0$. Вследствие чего имеем

$$M(\frac{P_{j^1}}{P_{j^0}} - 1) = r_0 + \lambda\frac{\operatorname{cov}(P_{j^1} - 1, x_m)}{P_{j^0}}.$$

Отсюда, выразив P_{j^0}, получаем

$$P_{j^0} = \frac{M(P_{j^1}) - \lambda\operatorname{cov}(P_{j^1}, x_m)}{1 + r_0}. \qquad (6.17)$$

Формула (**??**) выражает тот факт, что для получения сегодняшней цены рыночной ценной бумаги необходимо из ее ожидаемой будущей цены $M(P_{j^1})$ вычесть абсолютную премию за риск $\lambda \operatorname{cov}(P_{j^1}, x_m)$ и затем дисконтировать по безрисковой процентной ставке r_0.

Здесь *абсолютная премия за риск* — это разность между ожидаемой будущей ценой рисковой ценной бумаги и будущей ценой безрисковой ценной бумаги при условии, что в настоящее время их цены одинаковые. Математически абсолютная премия за риск равна величине $\lambda \operatorname{cov}(P_{j^1}, x_m)$.

Обобщения модели CAPM. В литературе описано множество различных моделей, обобщающих и развивающих CAPM. Мы остановимся на двух из них.

Пусть рассматривается N различных рынков, например рынок акций промышленности, рынок акций топливно-энергетического комплекса, рынок акций наукоемких отраслей и др. Тогда существует соответствующее количество оптимальных портфелей со своими доходностями и рисками . Интерес представляет расчет ожидаемой доходности и риска оптимального портфеля, состоящего из ценных бумаг различных рынков. Для этой цели есть обобщенная модель ценообразования на рынке капитала G-CAPM (General Capital Assets Pricing Model) — модель, с помощью которой исследуется несколько рынков капитала.

Рассмотрим модель G-CAPM подробнее. Ожидаемые доходности x_j ценных бумаг портфеля, состоящего из бумаг только n-го рынка, определяются по формуле

$$x_j = r_0 + (x_n - r_0)\beta_{j,n}, \quad n = 1, \ldots, N,$$

где r_0 — доходность безрисковых ценных бумаг; x_n — ожидаемая доходность оптимального портфеля n-го рынка; $\beta_{j,n}$ — коэффициент, рассчитанный по отношению к n-му рынку. Если в каждый рынок n вложено K_n средств, то доля соответствующих средств во всем рыночном капитале вычисляется по правилу

$$y_n = \frac{K_n}{\sum_{n=1}^{N} K_n}. \tag{6.18}$$

Модель G-CAPM утверждает, что в условиях равновесия справедливо соотношение

$$x_j = r_0 + \sum_{n=1}^{N} \Big[y_n(x_n - r_0)\beta_{j,n} \Big]. \tag{6.19}$$

В силу (??) из (??) получаем

$$x_j = r_0 + \frac{\sum_{n=1}^{N} (K_n(x_n - r_0)\beta_{j,n}}{\sum_{n=1}^{N} K_n}.$$

В условиях идеальных финансовых рынков с полной информацией все инвесторы вкладывают деньги в портфели с максимальным отношением дополнительной доходности к неопределенности. При этом указанное отношение должно быть одинаковым на всех рынках. Здесь

$\beta_{j,n} = \beta_j$ и обобщенная модель ценообразования G-CAPM становится моделью CAPM. В условиях неполноты информации и ненулевой трансакционной стоимости, например при учете комиссионных при купле-продаже ценных бумаг, отношение дополнительной доходности по сравнению с доходностью при купле-продаже безрисковых бумаг к неопределенности дохода может быть различным на различных финансовых рынках. В этом случае обобщенная модель G-CAPM дает более точные результаты.

Вплоть до 1976 г. развитие финансовой теории шло под доминирующим влиянием CAPM. В 1977 г. эта теория подверглась жесткой критике в работах Ричарда Ролла [21]. Ролл высказал мнение, что CAPM следует отвергнуть, поскольку она *в принципе* не допускает эмпирической проверки. Вопрос о принципиальной верифицируемости CAPM вызывает горячие споры и по сей день. Примерно в это же время Стивом Россом [22] была предложена альтернативная модель оценки капитальных активов, развитая в рамках *Арбитражной теории ценообразования* и получившая название "арбитражной модели", или APM. Эта модель строится на основе принципа, состоящего в том, что соотношение между ожидаемой доходностью и риском должно быть таким, чтобы ни один индивидуальный инвестор не мог получить неограниченный доход от арбитражной сделки. Этот принцип невозможности арбитража можно сформулировать в "физических" терминах как невозможность создать "финансовый вечный двигатель", т.е. машину без всякого риска, неограниченно долго "вытягивающую" деньги с рынка. Адепты арбитражной теории (Arbitrage Pricing Theory), в частности, Росс и Ролл [23], утверждают, что эта теория допускает, по крайней мере в принципе, эмпирическую проверку.

Арбитражная модель ценообразования представляет собой скорее конкурирующую с CAPM модель, чем дополняющую ее. В ней предполагается, что доходность r_j ценной бумаги определяется некоторым фиксированным набором факторов. В качестве таких *ведущих* факторов выбираются индексы известных портфелей, уровень инфляции, величина ставки рефинансирования и др. В модели могут присутствовать сразу несколько факторов. В наиболее простом случае, когда фактор один, доходность ценной бумаги связана с фактором соотношением

$$r_j = M(r_j) + \beta_j(I - M(I)) + e_j,$$

где β_j — коэффициент, связывающий изменения в значениях фактора I и доходности r_j; I — значение фактора, обеспечивающего доходность ценной бумаги; $M(I)$ — математическое ожидание этого фактора; e_j — случайный шум.

Заметим, что взяв в качестве ведущего фактора доходность рыночного портфеля, мы придем к модели CAPM.

Обе модели — CAPM и APTM требуют расчета коэффициентов β_j. Для вычисления β_j достаточно иметь статистику, состоящую из пар значений (r_m, r_j), и с помощью линейной регрессии получить уравнение

$$x_j = r_0 + (x_m - r_0)\beta_j, \tag{6.20}$$

где x_j — доходность ценной бумаги; x_m — доходность рынка.

Линейную регрессию можно построить, используя соответствующую компьютерную программу, в частности практически любые электронные таблицы. Без расчетов приближенное значение коэффициента β_j можно определить графически. Для этого в координатах x_m и x_j откладывают все возможные пары точек и проводится прямая, наилучшим образом их приближающая. Коэффициент наклона этой прямой и будет искомым коэффициентом β_j. При проведении такой прямой "на глаз" человек непроизвольно использует метод наименьших квадратов, т.е. минимизирует сумму квадратичных отклонений. Этот же метод используется и в электронных таблицах.

Заметим, что выше приведено упрощенное изложение вопросов, связанных с расчетом статистических характеристик ценной бумаги. В упоминавшихся финансовых изданиях наряду с параметром β ценной бумаги обычно приводится еще ряд характеристик, в частности так называемое "приспособленное"β (adjusted β) , скорректированное с учетом тенденции постепенного приближения к единице, характерной для данного показателя. Кроме того, приводится коэффициент α бумаги, позволяющий инвестору получить представление о соответствии текущей цены бумаги и той, которая соответствует равновесному рынку. Приводится также целый ряд параметров, характеризующих собственно корректность статистических расчетов.

Библиографический список

1. Альгин, А.П. Риск и его роль в общественной жизни / А.П.Альгин. М.: Мысль, 1989.

2. Балабанов, И.Т. Риск – менеджмент /И.Т.Балабанов. М.: Финансы и статистика, 1996.

3. Лапуста, М.Г. Риски в предпринимательской деятельности / М.Г.Лапуста, Л.Г.Шаршукова. М.: ИНФРА - М, 1998.

4. Риски в современном бизнесе / П.Г.Грабовый [и др.]. М.: Аланс, 1994.

5. Чалый-Прилуцкий, В.А. Рынок и риск : методические материалы: (пособие для бизнесменов) по анализу оценки и управления риском / В.А.Чалый-Прилуцкий. М.: НИУР : Центр СИНТЕК, 1994.

6. Arrow, K.J. Aspects of the theory of risk-bearing / K.J.Arrow. Helsinki: Yrjo Jahnssonin Saatio, 1965.

7. Granville, J.E. New strategy of daily stock market for maximum profit / J.E.Granville. New York: Prentice-Hall, 1976.

8. Therapeutic risk: Perception, measurement, management / (eds) D.Burley, W. H. W.Inman. Chichester: Wiley, 1988.

9. Covello, V. T. Risk communication: Research and practice / V.T.Covello, D. von Winterfeldt, P.Slovic. New York: Columbia Univ., School of Public Health, 1988.

10. Lewis, H. W. Technological risk / H.W.Lewis. New York: Norton, 1990.

11. Linnerooth, J. The evaluation of life saving: A survey / J.Linnerooth. Laxenburg : IIASA, 1975. (Res. Report; 75-21).

12. Slovic, P. The perception of risk / P.Slovic. London; Sterling: Earthscan Publ.Ltd, 2000.

13. Гранатуров, В.М. Экономический риск: сущность, методы измерения, пути снижения / В.М.Гранатуров. М.: Дело и Сервис, 1999.

14. Тренев, Н.Н. Управление финансами / Н.Н.Тренев. М.: Финансы и статистика, 2000.

15. Transboundary risk management / (eds) J.Linnerooth-Bayer, R. E.Löfstedt, Sjöstedt. Laxenburg : IIASA, 2001.

16. Bacskai, T. A gazdasigi kockâsat es meresemeh medszerei / T.Bacskai. Budapest: Közgazdasagi es Jogi Konyvkiado, 1976.

17. Шарп, У. Инвестиции / У.Шарп, Г.Дж.Александер, Дж.В.Бэйли. М.: ИНФРА-М, 1997.

18. Sharp, W.E. Capital Asset price : a theory of market equilibrium under conditions of risk / W.E.Sharp // J. Finance. 1964. 29(3). P. 425–442.

19. Lintner, J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets / J.Lintner // Rev. Econom.& Statistics. 1965. P. 13–27.

20. Mossin, J. Equilibrium in a capital asset market / J.Mossin // Econometrica. 1966. 34(4). P. 768–783.

21. Roll, R. A critique of asset pricing theory test / R.Roll // J. Financ. Econom. 1977.

22. Ross, S.A. The arbitrage theory of capital asset pricing / S.A.Ross // J. Economic Theory. 1976.

23. Roll, R. A critical reexamination of the empirical evidence of the arbitrage pricing theory / R.Roll, S.A.Ross // J. Finance. 1984.

24. Markowitz, H. Portfolio selection / H.Markowitz // J. Finance. 1952. Vol.7. P. 77–91.

25. Tobin, J. Liquidity preference as behavior towards risk / J.Tobin // Rev. Economic Stud. 1958.

Учебное издание

Вячеслав Иванович Максимов
Олег Игоревич Никонов

МОДЕЛИРОВАНИЕ РИСКА И РИСКОВЫХ СИТУАЦИЙ

Редактор *О.В.Байгулова*

Компьютерная верстка авторская

ИД № 06263 от 12.11.2001 г.

Подписано в печать 23.07.2004		Формат 60x84 1/16
Бумага писчая	Плоская печать	
		Усл.печ.л. 4,71
Уч.-изд.л.3,3 Тираж 100	Заказ	Цена "С"

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ–УПИ
620002, Екатеринбург, ул.Мира, 19