1. Теория поведения потребителя

Как известно, в основе модели потребителя лежит гипотеза о рациональном поведении, которая сводится к выполнению двух основных принципов:

❖ Потребитель упорядочивает потребительские наборы (среди которых он осуществляет выбор) на основе предпочтений, удовлетворяющих некоторым естественным условиям.

❖ Потребитель выбирает наилучший набор (в соответствие с этим упорядочением) среди доступных ему потребительских наборов.

Таким образом, чтобы можно было анализировать и предсказывать поведение потребителя, необходимо описать для каждой ситуации выбора способ упорядочивания потребительских наборов и ограничения, которым должны удовлетворять допустимые выборы.

Так специфицированная модель позволяет изучать

♦ каким соотношениям удовлетворяет оптимальный выбор потребителя;

♦ как изменяется выбор потребителя при изменении множества доступных ему потребительских наборов (так называемая сравнительная статика).

1.1. Отношения предпочтения

В отличие от обыденного понимания, понятие блага (товара) в микроэкономике имеет довольно широкий характер: блага различают не только по их физическим характеристикам, но и по времени, когда они становятся доступными и по местам их расположения. Будем предполагать, что потребителю доступны l благ. Под **множеством допустимых альтернатив** X будем понимать все физически возможные наборы благ и, как правило, будем рассматривать его как некоторое подмножество неотрицательного ортанта $\mathbb{R}^l_+$, т.е. $X \subset \mathbb{R}^l_+$. В некоторых постановках полезно предполагать, что количество блага может быть отрицательным; в частности такая потребность может возникнуть, когда в качестве одного из товаров рассматривается труд индивидуума.

Мы предполагаем, что в основе действий потребителя лежат его предпочтения, и в соответствии с этими предпочтениями он осуществляет выбор между доступными ему в той ситуации, с которой он сталкивается, наборами из множества допустимых альтернатив. Доступность потребительских наборов может определяться финансовыми, законодательными и другими ограничениями.

Обсудим сначала типичные предположения относительно предпочтений потребителя. Отношение предпочтения является примером того, что в математике называется бинарным отношением. Напомним, что формально **бинарное отношение** $\mathfrak{R}$ — это подмножество множества $X \times X$ ($\mathfrak{R} \subseteq X \times X$). Другими словами $\mathfrak{R}$ — это некоторое множество упорядоченных пар $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, где $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — элементы множества X. Когда пара $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ принадлежит множеству $\mathfrak{R}$, говорят, что $\boldsymbol{x}$ находится в отношении $\mathfrak{R}$ к $\boldsymbol{y}$, что обычно записывается как $\boldsymbol{x} \,\mathfrak{R}\, \boldsymbol{y}$.

Определим теперь некоторые свойства бинарных отношений, которые в дальнейшем используем при рассмотрении отношения предпочтения. Наиболее часто в теории поведения потребителя рассматриваются свойства полноты и транзитивности.

Определение 1.

Отношение $\Re$ называется полным, если для любых двух элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ множества X ($\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$) выполнено либо $\boldsymbol{x} \Re \boldsymbol{y}$, либо $\boldsymbol{y} \Re \boldsymbol{x}$ (либо и то и другое).

Полнота отношения $\Re$ означает сопоставимость любых двух элементов множества X по этому свойству. Так если мы рассматриваем отношение $\Re_1$ “быть братом” на множестве населения планеты Земля, то очевидно, что данное отношение не обладает свойством полноты. Если же мы рассмотрим отношение $\Re_2$ “не ниже ростом чем” на том же множестве альтернатив, то видим полноту отношения $\Re_2$. Кроме того отметим, что если два индивидуума $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ имеют одинаковый рост, то мы имеем как $\boldsymbol{x} \Re_2 \boldsymbol{y}$, так и $\boldsymbol{y} \Re_2 \boldsymbol{x}$.

Определим теперь свойство транзитивности.

Определение 2.

Отношение $\Re$ называется транзитивным, если для любых трех элементов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ множества X ($\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$), из того что $\boldsymbol{x} \Re \boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y} \Re \boldsymbol{z}$, следует что $\boldsymbol{x} \Re \boldsymbol{z}$.

Полное отношение не обязано быть транзитивным. Чтобы показать это рассмотрим следующий условный пример. Пусть множество альтернатив состоит из 3 индивидуумов, первый из которых должен некоторую сумму денег второму, второй должен третьему, а третий должен первому. Введем на этом множестве участников отношение “должен некоторую сумму денег”. Как не трудно проверить, данное отношение является полным, но не удовлетворяет свойству транзитивности. В то же время отношение $\Re_2$ упоминавшееся выше обладает этим свойством.

Определение 3.

Отношение $\Re$ называется рефлексивным, если для каждого $\boldsymbol{x} \in X$, выполнено $\boldsymbol{x} \Re \boldsymbol{x}$.

Отношение $\Re_3$ “стоит в списке очередников на жилье не раньше чем” обладает свойством рефлексивности. В то же время, отношение $\Re_4$ “состоит в браке с” не удовлетворяет свойству рефлексивности.

Определение 4.

Отношение $\Re$ называется нерефлексивным, если не существует $\boldsymbol{x} \in X$, такое что выполнено $\boldsymbol{x} \Re \boldsymbol{x}$.

Примером нерефлексивного отношения является отношение $\Re_4$ приведенное выше, а примером отношения не удовлетворяющим этому свойству является отношение $\Re_3$. Как не трудно понять, нерефлексивным является отношение для которого свойство рефлексивности не выполнено для каждого (!) элемента множества X. Примером отношения, которое не является ни рефлексивным, ни нерефлексивным является отношение $\Re_5$ “любит”, так как не очевидно, что каждый человек любит себя, но и не очевидно, что не существует людей, которые любят себя.

Определение 5.

Отношение $\Re$ называется **асимметричным**, если для любой пары $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$, из $\boldsymbol{x} \Re \boldsymbol{y}$ следует, что $\boldsymbol{y} \Re \boldsymbol{x}$ неверно.

Примером асимметричного отношения может служить отношение $\Re_6$ “быть женой”, а отношение $\Re_7$ “такого же роста, как и” этим свойством не обладает.

Определение 6.

Отношение $\Re$ является **отрицательно транзитивным**, если для любых трех элементов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ множества X таких, что $\boldsymbol{x} \Re \boldsymbol{y}$, выполнено либо $\boldsymbol{x} \Re \boldsymbol{z}$, либо $\boldsymbol{z} \Re \boldsymbol{y}$.

Название этого свойства происходит от следующей альтернативной формы его задания:

$$\neg (\boldsymbol{x} \Re \boldsymbol{z}) \wedge \neg (\boldsymbol{z} \Re \boldsymbol{y}) \Rightarrow \neg (\boldsymbol{x} \Re \boldsymbol{y}).$$

Примером отношения, которое удовлетворяет свойству отрицательной транзитивности, служит отношение $\Re_8$ “выше ростом, чем”. (Попытайтесь привести примеры отношений, которые этому свойству не удовлетворяют).

Определение 7.

Отношение $\Re$ называется **ацикличным**, если из $\boldsymbol{x}_1 \Re \boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_2 \Re \boldsymbol{x}_3$, ..., $\boldsymbol{x}_{n-1} \Re \boldsymbol{x}_n$ следует, что $\boldsymbol{x}_n \Re \boldsymbol{x}_1$ ложно.

(Попытайтесь придумать несколько примеров отношений как удовлетворяющих, так и не удовлетворяющих этому свойству).

В экономической теории предпочтение потребителя — единственная его характеристика, которая принимается во внимание при объяснении его поведения. Поэтому в дальнейшем в теории потребления мы отождествляем потребителя с его предпочтениями.

Будем строить теорию потребительского поведения на основе **нестрогого отношения предпочтения** $\succeq$ — бинарного отношения, заданного на множестве допустимых альтернатив. Если для двух альтернатив $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из X выполняется соотношение $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$, будем говорить, что альтернатива $\boldsymbol{x}$ *не хуже*, чем альтернатива $\boldsymbol{y}$ (для данного потребителя).

Традиционным для экономической теории является предположение о том, что нестрогое отношение предпочтения, на основе которого потребители упорядочивают альтернативы, полно и транзитивно. Эти предположения тесно связаны с понятием *рациональности* экономических агентов. Как представляется, неотъемлемым свойством рациональности является непротиворечивость выбора и возможность осуществить выбор в любой мыслимой ситуации. Понятно, что эти условия в наших терминах приобретают форму свойств полноты и транзитивности. (Заметим, что нестрогое отношение предпочтения будет полным, если для любых двух альтернатив из допустимого множества альтернатив одна из них не хуже другой. Нестрогое отношение предпочтения будет транзитивным, если для любых трех альтернатив из множества допустимых альтернатив из того, что первая не хуже второй, а вторая не хуже третей, следует, что первая не хуже третей.)

Существуют, однако, ситуации, когда поведение потребителей несовместимо с предположением, что его предпочтения полны и транзитивны. Чаще всего причина такого нарушения — отсутствие транзитивности в наблюдаемых выборах участника.

Если мы попросим индивидуума сравнить стакан чая, куда положили одну крупинку сахара, и стакан чая с двумя крупинками, то практически всегда получим ответ о безразличии в выборе. Такой же ответ получим при сравнении стаканов с двумя и тремя крупинками. Продолжим наш опрос достаточно долго, и мы придем к абсурдному выводу, если будем настаивать на транзитивности. А разве для индивидуума совершенно безразлично, что пить — стакан с одной крупинкой, или стакан с килограммом сахара?! Как не трудно понять, причина недоразумения кроется в принципиальной невозможности объективного сравнения малых величин блага.

Другими причинами появления нетранзитивности можно назвать то что на индивидуальный выбор участников могут влиять мнения других людей, его предпочтения сами по себе могут меняться во времени и это далеко не все.

На основе данного нестрогого отношении предпочтения можно построить другие два отношения между альтернативами, которые будут использоваться для характеристики поведения потребителя:

Строгое отношение предпочтения $\succ$ определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y} \ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X), \text{ если } \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}, \text{ но не } \boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x}.$$

Если для двух альтернатив $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из X выполняется соотношение $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$, будем говорить, что альтернатива $\boldsymbol{x}$ *лучше*, чем альтернатива $\boldsymbol{y}$.

В случае полноты нестрогого отношения предпочтения это определение можно записать в эквивалентной форме:

Утверждение 1.
Пусть нестрогое отношение предпочтения полно, тогда

$(\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}) \ \Leftrightarrow\ $ (неверно, что $\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x}$).

Доказательство:

$\Rightarrow$ Утверждение $(\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}) \ \Rightarrow\ $ (неверно, что $\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x}$) следует прямо из определения строгого отношения предпочтения.

$\Leftarrow$ Полнота нестрогого отношения предпочтения означает, что

(неверно, что $\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x}$) $\Rightarrow (\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y})$.

По определению строгого отношения предпочтения условия

(неверно, что $\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x}$) и $(\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y})$

в совокупности означают $(\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y})$.

■

Заметим, что на основе данного строгого отношения предпочтения можно построить нестрогое отношение предпочтения следующего типа:

$\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x}$, если неверно, что $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$.

Отношение безразличия ~ определяется следующим образом:

$\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$: $(\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x})$.

Если для двух альтернатив $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из X выполняется соотношение $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$, будем говорить, что альтернатива *эквивалентна* альтернативе $\boldsymbol{y}$.

Заметим, что свойства полноты и транзитивности нестрогого отношения предпочтения обуславливают свойства асимметричности и отрицательной транзитивности построенного на его основе строгого отношения предпочтения и наоборот, что показывают два нижеследующих утверждения.

Утверждение 2.

Строгое отношение предпочтения является асимметричным тогда и только тогда, когда нестрогое отношение предпочтения полное.

Доказательство:

$\Rightarrow$ Асимметричность строгого отношения предпочтения означает, что для любой пары $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ из $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ следует, что $\boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x}$ неверно. Значит, либо $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ неверно, либо $\boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x}$ неверно. Отсюда, пользуясь определением строгого отношения предпочтения, либо $\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{y}$, либо $\boldsymbol{y} \preceq \boldsymbol{x}$. А это и есть полнота нестрогого отношение предпочтения.

$\Leftarrow$ Пусть теперь мы нестрогое отношение предпочтения полно, т.е. для любой пары $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ либо $\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{y}$, либо $\boldsymbol{y} \preceq \boldsymbol{x}$. Согласно Утверждению **1** это то же самое, что либо $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ неверно, либо $\boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x}$ неверно. Значит, из $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ следует, что $\boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x}$ неверно. А это и означает асимметричность строгого отношения предпочтения.

■

Утверждение 3.

Пусть нестрогое отношение предпочтения является полным. Тогда отрицательная транзитивность строгого отношение предпочтения эквивалентно транзитивности нестрогого отношения предпочтения.

<u>Доказательство</u>:

В силу Утверждения **1** имеем

$$\neg(\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x}).$$

Очевидно, что отрицательная транзитивность строгого отношение предпочтения в форме

$$\neg(\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{z}) \wedge \neg(\boldsymbol{z} \succ \boldsymbol{y}) \Rightarrow \neg(\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y})$$

эквивалентна транзитивности нестрогого отношения предпочтения:

$$(\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{z}) \wedge (\boldsymbol{z} \succeq \boldsymbol{y}) \Rightarrow (\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}).$$

■

<u>Замечание</u>: в этом утверждении, согласно Утверждению **2**, полноту нестрогого отношения предпочтения можно заменить на асимметричность строгого отношения предпочтения.

Утверждения **2** и **3** в совокупности доказывают, что из транзитивности и полноты нестрогого отношения предпочтения следует асимметричность и отрицательная транзитивность строгого отношения предпочтения и наоборот.

Существует две традиции построения теории поведения потребителя, различающиеся способом описания предпочтений индивидуума. Первая, которой мы и будем придерживаться, опирается на нестрогое отношение предпочтения. Вторая же традиция исходит из строгого отношения предпочтения. Заметим, что эти две традиции приводят к одинаковым результатам, если строгое и нестрогое отношения предпочтения построены на основе друг друга указанным выше способом.

Утверждение 4.

Если строгое отношение предпочтения асимметрично и отрицательно транзитивно, то оно

(1) транзитивно,

(2) ациклично,

(3) нерефлексивно.

<u>Доказательство</u>:

(1) Пусть строгое отношение предпочтения не является транзитивным, то есть существуют такие $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z} \in X$, что $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z} \succ \boldsymbol{y}$, но $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ не выполнено. По ассимметричности из $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{z}$ следует, что $\boldsymbol{z} \succ \boldsymbol{x}$ неверно. Так как $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ неверно и $\boldsymbol{z} \succ \boldsymbol{x}$ неверно, то по отрицательной транзитивности $\boldsymbol{z} \succ \boldsymbol{y}$ неверно. Получили противоречие.

(2) Пусть для $\boldsymbol{x}_k \in X$ (k=1,...,n) выполнено $\boldsymbol{x}_1 \succ \boldsymbol{x}_2 \succ \boldsymbol{x}_3 \succ \ldots \succ \boldsymbol{x}_{n-1} \succ \boldsymbol{x}_n$. По индукции и только что доказанной транзитивности имеем $\boldsymbol{x}_1 \succ \boldsymbol{x}_n$. Из ацикличности получаем, что $\boldsymbol{x}_n \succ \boldsymbol{x}_1$ неверно.

(3) Пусть $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{x}$. Так как $\succ$ ациклично, это означает, что $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{x}$ неверно. Противоречие.

■

Определение 8.

Множеством безразличия (кривой безразличия) $\mathrm{I}(\boldsymbol{x})$, соответствующим точке $\boldsymbol{x} \in X$ называется множество всех точек, эквивалентных $\boldsymbol{x}$:

$$\mathrm{I}(\boldsymbol{x}) = \{\, \boldsymbol{y} \in X \mid \boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{x} \}.$$

Утверждение 5.

Если нестрогое отношение предпочтения полно и транзитивно, то отношение эквивалентности

(1) транзитивно,

(2) рефлексивно,

(3) любые два множества безразличия либо не имеют общих точек, либо совпадают.

Доказательство:

(1) Пусть для $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z} \in X$, выполнено $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{z} \sim \boldsymbol{y}$. По определению эквивалентности имеем $\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{z} \preceq \boldsymbol{y}$, и, кроме того, $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{z} \succeq \boldsymbol{y}$. По транзитивности нестрогого отношения предпочтения это влечет $\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$. Значит, $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$.

(2) Из полноты нестрогого отношения предпочтения следует его рефлексивность, т.е. $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{x}\ \forall\ \boldsymbol{x} \in X$. По определению эквивалентности это влечет $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}$.

(3) Пусть $\mathrm{I}(\boldsymbol{x})$ и $\mathrm{I}(\boldsymbol{y})$ — два множества безразличия и и пусть они имеют общую точку $\boldsymbol{z}$. Тогда по определению множеств безразличия, используя транзитивность и рефлексивность, имеем $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$. Используя транзитивность и рефлексивность легко показать совпадение $\mathrm{I}(\boldsymbol{x})$ и $\mathrm{I}(\boldsymbol{y})$.

■

Тесты и задачи для самостоятельного решения

1. Если отношение предпочтения полно и транзитивно, то оно

♦ нерефлексивно;
♦ асимметрично;
♦ рефлексивно.

2. Если отношение предпочтения является транзитивным, то оно также является

♦ ацикличным;
♦ полным;
♦ нерефлексивным.

3. Если отношение предпочтения является ацикличным, то оно также является

♦ транзитивным;
♦ асимметричным;
♦ рефлексивным.

4. Асимметричное отношение предпочтения обладает свойством

♦ нерефлексивности;
♦ транзитивности;
♦ рефлексивности.

5. Из свойства отрицательной транзитивности и асимметричности следует свойство
♦ цикличности;
♦ транзитивности;
♦ рефлексивности.

6. Бинарное отношение «А отец В» не обладает свойствами
♦ полноты;
♦ нерефлексивности;
♦ асимметричности.

7. Бинарное отношение «А родная сестра В» обладает свойством
♦ полноты;
♦ транзитивности;
♦ рефлексивности.

8. Бинарное отношение «А сдает экзамен В» на множестве людей, находящихся в данный момент в Университете обладает свойством
♦ полноты;
♦ нерефлексивности;
♦ рефлексивности.

9. Бинарное отношение $\Re$ называется нерефлексивным, если
♦ из того, что $x\Re y$ следует, что неверно $y\Re x$;
♦ из того, что неверны $x\Re y$ и $y\Re z$ следует, что неверно $x\Re z$;
♦ неверно, что $x\Re x$.

10. Бинарное отношение $\Re$ называется асимметричным, если
♦ из того, что $x\Re y$ следует, что неверно $y\Re x$;
♦ из того, что неверны $x\Re y$ и $y\Re z$ следует, что неверно $x\Re z$;
♦ неверно, что $x\Re x$.

11. Бинарное отношение называется отрицательно транзитивным, если
♦ из того, что $x\Re y$ следует, что неверно $y\Re x$;
♦ из того, что неверны $x\Re y$ и $y\Re z$ следует, что неверно $x\Re z$;
♦ неверно, что $x\Re x$.

12. Покажите, что:
Асимметричное и отрицательно транзитивное отношение предпочтения является
- нерефлексивным (т.е. неверно, что $x \succ x$);
- транзитивным (т.е. если $x \succ y$, $y \succ z$, то $x \succ z$);

- ацикличным (т.е. если $\boldsymbol{x}_1 \succ \boldsymbol{x}_2 \succ \boldsymbol{x}_3 \dots \boldsymbol{x}_{n-1} \succ \boldsymbol{x}_n$, то неверно, что $\boldsymbol{x}_n \succ \boldsymbol{x}_1$).

13. Пусть X состоит из n-мерных векторов (с неотрицательными компонентами), а отношение задано следующим образом: $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$, если все компоненты вектора $\boldsymbol{x}$ (строго) больше соответствующих компонент вектора $\boldsymbol{y}$. Охарактеризуйте соответствующее ему отношение нестрогого предпочтения и отношение безразличия ($\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$, если неверно, что $\boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x}$).

1.2. Элементы теории выбора и выявленные предпочтения

Обычно в микроэкономике описание предпочтений с помощью бинарных отношений используется в качестве отправной точки анализа рационального выбора потребителя. Но возможен и другой подход, отправной точкой которого непосредственно является выбор участника. Преимущество такого подхода состоит в следующем: мы можем наблюдать выбор участника, но не его предпочтения. Однако в некотором достаточно широком классе случаев подход, основанный на выборе, полностью эквивалентен подходу, основанному на предпочтениях, в том смысле, что возможно по известному выбору построить отношение предпочтения, которое порождает этот выбор. С другой стороны, подход, основанный на предпочтениях, позволяет построить более богатую теорию.

Для описания выбора участника в теории выбора вводятся понятия ситуации выбора и правила выбора, определенного на множестве ситуаций выбора. Ситуация выбора — это некоторое подмножество множества допустимых (физически) альтернатив X, с которым участник сталкивается и из которого он может выбирать.

Определение 9.

Пусть $\mathcal{A}$ — множество ситуаций выбора ($\mathcal{A} \subseteq 2^X$). Правило выбора $\mathrm{C}(.)$ ставит в соответствие каждой ситуации выбора A из $\mathcal{A}$ непустое множество $\mathrm{C}(A)$ выбранных альтернатив, каждая из которых является элементом A, т.е. $\mathrm{C}(A) \subseteq A$.

Рациональность потребителя в терминах функции выбора выражается в «аксиоме выбора Хаутеккера».

Аксиома выбора Хаутеккера
(Аксиома выявленных предпочтений)

Пусть A и A' — две ситуации выбора и альтернативы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ принадлежат как A, так и A'. Если $\boldsymbol{x} \in \mathrm{C}(A)$, а $\boldsymbol{y} \in \mathrm{C}(A')$, то $\boldsymbol{x} \in \mathrm{C}(A')$.

Смысл данного свойства прозрачен. Если подразумевать, что потребитель рационален в том смысле, что выбирает в любой ситуации выбора “лучшие” альтернативы, то данная аксиома устанавливает условие непротиворечивости его выбора.

Определение 10.

Будем говорить, что альтернатива $\boldsymbol{x}$ нестрого выявленно предпочитается альтернативе $\boldsymbol{y}$, если существует ситуация выбора A, такая что $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ и $\boldsymbol{x} \in \mathrm{C}(A)$.

В дальнейшем нестрогое отношение выявленного предпочтения будем обозначать $\succeq^{\mathrm{R}}$ и говорить, что $\boldsymbol{x}$ *выявленно не хуже* $\boldsymbol{y}$, когда $\boldsymbol{x} \succeq^{\mathrm{R}} \boldsymbol{y}$. Смысл этого определения состоит в том, что если была выбрана альтернатива $\boldsymbol{x}$ в ситуации выбора, когда была доступна также альтернатива $\boldsymbol{y}$, значит, $\boldsymbol{x}$ не может быть хуже $\boldsymbol{y}$.

Определение 11.

Будем говорить, что альтернатива $\boldsymbol{x}$ строго выявленнно предпочитается альтернативе $\boldsymbol{y}$, если существует ситуация выбора A, такая что $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ и $\boldsymbol{x} \in \mathrm{C}(A)$, но $\boldsymbol{y} \notin \mathrm{C}(A)$.

Строгое отношение выявленного предпочтения будем обозначать $\succ^{\mathrm{R}}$ и говорить, что $\boldsymbol{x}$ *выявленно лучше* $\boldsymbol{y}$, когда $\boldsymbol{x} \succ^{\mathrm{R}} \boldsymbol{y}$. Смысл этого определения состоит в том, что если в какой-то ситуации выбора были доступны как $\boldsymbol{x}$, так и $\boldsymbol{y}$, но альтернатива $\boldsymbol{x}$ была выбрана, а альтернатива $\boldsymbol{y}$ — нет, значит, $\boldsymbol{x}$ лучше $\boldsymbol{y}$.

Аксиому выбора Хаутеккера можно переформулировать в терминах выявленных предпочтений:

> Если $\boldsymbol{x}$ выявленно не хуже $\boldsymbol{y}$, то $\boldsymbol{y}$ не может быть выявленно лучше $\boldsymbol{x}$, т.е.
> $(\boldsymbol{x} \succeq^{\mathrm{R}} \boldsymbol{y}) \Rightarrow \neg (\boldsymbol{y} \succ^{\mathrm{R}} \boldsymbol{x})$.

Рациональность потребителя в терминах предпочтений тесно связана с рациональностью выбора потребителя, как она сформулирована в аксиоме выбора Хаутеккера.

Утверждение 6.

Пусть правило выбора $\mathrm{C}(A)$ определено на множестве ситуаций выбора $\mathcal{A}$ и при этом

- выполнена аксиома выбора Хаутеккера;
- $\mathcal{A}$ содержит все двух- и трехэлементные подмножества X.

Тогда нестрогое отношение выявленного предпочтения $\succeq^{\mathrm{R}}$, соответствующее правилу выбора $\mathrm{C}(A)$

(1) полно,

(2) транзитивно.

<u>Доказательство</u>:

(1) Пусть $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ — две альтернативы из X. Ситуация выбора $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ должна принадлежать $\mathcal{A}$, так как это двухэлементное подмножество X. Поскольку по определению

C($\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$) не должно быть пустым, то либо $\boldsymbol{x} \in$ C($\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$), либо $\boldsymbol{y} \in$ C($\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$). То есть либо $\boldsymbol{x} \succeq^{R} \boldsymbol{y}$, либо $\boldsymbol{y} \succeq^{R} \boldsymbol{x}$.

(2) Пусть $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ — три альтернативы из X, такие что $\boldsymbol{x} \succeq^{R} \boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y} \succeq^{R} \boldsymbol{z}$. Ситуация выбора $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ должна принадлежать $\mathcal{A}$, так как это трехэлементное подмножество X.

Покажем, что $\boldsymbol{x} \in$ C($\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$). Если $\boldsymbol{y} \in$ C($\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$), то из аксиомы выбора Хаутеккера следует, что $\boldsymbol{x} \in$ C($\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$), поскольку $\boldsymbol{x} \succeq^{R} \boldsymbol{y}$. Аналогично, если $\boldsymbol{z} \in$ C($\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$), то $\boldsymbol{x} \in$ C($\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$). Поскольку C($\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$) непусто, то в любом случае $\boldsymbol{x} \in$ C($\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$). Это влечет за собой, что $\boldsymbol{x} \succeq^{R} \boldsymbol{z}$.

■

Данное утверждение показывает, что выбор на основе правила выбора, удовлетворяющего аксиоме Хаутеккера, можно «рационализировать» как выбор на основе некоторого отношения предпочтения. Заметим, что, как будет показано ниже, справедливо и обратное.

Если заданы предпочтения $\succeq$, то правило выбора потребителя, соответствующее этим предпочтениям естественно определить следующим образом:

$$\mathrm{C}_{\succeq}(A) \equiv \{\boldsymbol{x} \in A \mid \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y} \ \forall \ \boldsymbol{y} \in A\}.$$

Утверждение 7.

Пусть праило выбора $\mathrm{C}_{\succeq}(A)$ соответствует транзитивному нестрогому отношению предпочтения $\succeq$. Тогда это правило выбора удовлетворяет аксиоме выбора Хаутеккера.

<u>Доказательство</u>:

Пусть $\boldsymbol{x} \succeq^{R} \boldsymbol{y}$. Это означает, что в некоторой ситуации выбора A как $\boldsymbol{x}$, так и $\boldsymbol{y}$ можно было выбрать ($\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$) и среди выбранных альтернатив была альтернатива $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \in \mathrm{C}_{\succeq}(A)$). Поскольку правило $\mathrm{C}_{\succeq}(A)$ порождено нестрогим отношением предпочтения $\succeq$, то $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$. Пусть в некоторой другой ситуации выбора A' как $\boldsymbol{x}$, так и $\boldsymbol{y}$ можно было выбрать ($\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A'$) и среди выбранных альтернатив была альтернатива $\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{y} \in \mathrm{C}_{\succeq}(A')$). Это означает, что $\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{z} \ \forall \ \boldsymbol{z} \in A'$. Из транзитивности следует, что то же самое должно быть верным для $\boldsymbol{x}$, т.е. $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{z} \ \forall \ \boldsymbol{z} \in A'$. Таким образом, $\boldsymbol{x} \in \mathrm{C}_{\succeq}(A')$, то есть аксиома Хаутеккера выполнена.

■

Покажем теперь, что если множество ситуаций выбора, на котором определено правило выбора, достаточно богато, то подход, берущий за основу правило выбора, эквивалентен подходу, берущему за основу предпочтения.

Утверждение 8.

Пусть выполнены условия Утверждения 6. Тогда правило выбора $\mathrm{C}^{R}(A)$, порожденное нестрогим отношением выявленного предпочтения $\succeq^{R}$, сопадает с исходным правилом выбора на $\mathcal{A}$, т.е.

$$C^R(A) = C(A)\ \forall\ A \in \mathcal{A}.$$

Доказательство:

$(C(A) \subseteq C^R(A))$

Пусть $\boldsymbol{x} \in C(A)$. Тогда по определению нестрогого выявленного предпочтения $\boldsymbol{x} \succeq^R \boldsymbol{y}\ \forall\ \boldsymbol{y} \in A$. Отсюда видно, что $\boldsymbol{x} \in C^R(A)$.

$(C^R(A) \subseteq C(A))$

Пусть $\boldsymbol{x} \in C^R(A)$. Поскольку множество $C(A)$ непусто, то существует альтернатива $\boldsymbol{y} \in C(A)$. Условие $\boldsymbol{x} \in C^R(A)$ означает, что для произвольной альтернативы $\boldsymbol{z} \in A$, в том числе и для $\boldsymbol{y}$, выполнено $\boldsymbol{x} \succeq^R \boldsymbol{z}$, то есть существует такая ситуация выбора A', что $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A'$ и $\boldsymbol{x} \in C(A')$.

Таким образом, мы имеем $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A'$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$, $\boldsymbol{x} \in C(A')$ и $\boldsymbol{y} \in C(A)$. По аксиоме Хаутеккера это означает, что $\boldsymbol{x} \in C(A)$.

■

Тесты и задачи для самостоятельного решения

1. Нестрогое отношение выявленного предпочтения всегда обладает свойством
- ♦ полноты;
- ♦ транзитивности;
- ♦ рефлексивности.

2. Пусть множество альтернатив X конечно. Тогда функция выбора C(.), определенная на всех подмножествах множества X, удовлетворяет аксиоме выявленных предпочтений Хаутеккера, если
- ♦ правило (функция) выбора является вогнутым;
- ♦ выбор участника может быть описан полным и транзитивным отношением предпочтения;
- ♦ функция спроса участника может быть получена на основе сравнения потребительских излишков.

3. Множество альтернатив X конечно и состоит из 3 элементов $X = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$. Участник осуществляет свой выбор на его подмножествах $A_1=\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$, $A_2=\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$. Выбор участника описывается функцией выбора C(.). Какие из нижеприведенных правил выбора не удовлетворяют аксиоме выявленных предпочтений?
- ♦ $C_1(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\})=\{\boldsymbol{x}\}$, $C_1(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\})=\{\boldsymbol{x}\}$;
- ♦ $C_2(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\})=\{\boldsymbol{x}\}$, $C_2(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\})=\{\boldsymbol{y}\}$;
- ♦ $C_3(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\})=\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$, $C_3(\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\})=\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$.

4. Множество альтернатив X конечно и состоит из 3-х элементов $X = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$. Участник осуществляет свой выбор на его подмножествах $A_1=\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$, $A_2=\{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$, $A_3=\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\}$. Выбор участника описывается функцией выбора C(.), при этом $C(A_1) = \{\boldsymbol{x}\}$, $C(A_2) = \{\boldsymbol{y}\}$, $C(A_3) = \{\boldsymbol{z}\}$. Какие из нижеприведенных высказываний справедливы?

1) Выбор удовлетворяет аксиоме выявленных предпочтений.
2) Выбор участника представим некоторым отношением предпочтения.
♦ 1;
♦ 2;
♦ 1, 2.

5. Какому из перечисленных утверждений эквивалентна аксиома выявленных предпочтений?
♦ Пусть X — множество альтернатив. Пусть $A, A' \subseteq X$ и кроме того $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A'$.
Тогда из того, что $\boldsymbol{x} \in C(A)$ и $\boldsymbol{y} \in C(A')$ следует $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C(A)$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C(A')$, где C(.) — функция выбора.
♦ Пусть X — множество альтернатив. Тогда из того, что $\boldsymbol{x} \in A$ и $\boldsymbol{y} \in A'$ следует $\boldsymbol{x} \in A'$ и $\boldsymbol{y} \in A$, где $A, A' \subseteq X$ некоторые подмножества X.
♦ Пусть X — множество альтернатив. Пусть $A, A' \subseteq X$ и кроме того $\boldsymbol{x} \in C(A)$ и $\boldsymbol{y} \in C(A')$, где C(.) — функция выбора. Тогда $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A'$.

6. Пусть X — множество альтернатив.
Пусть $A, A' \in X$ и кроме того $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A'$. Тогда из того, что $\boldsymbol{x} \in C(A)$ и $\boldsymbol{y} \in C(A)$ следует $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\} \in C(A)$ и $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\} \in C(A')$, где C(.) — правило выбора. Данное свойство является:
♦ формулировкой транзитивности отношения выявленного предпочтения;
♦ формулировкой аксиомы выявленных предпочтений, в которой допущена ошибка;
♦ формулировкой аксиомы выявленных предпочтений.

7. Пусть X — множество альтернатив. Рассмотрим $A, A' \in X$ и такие наборы $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, что $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A'$. Тогда из того, что $\boldsymbol{x} \in C(A)$ и $\boldsymbol{y} \in C(A')$ следует $\boldsymbol{y} \in C(A)$ и $\boldsymbol{x} \in C(A')$, где C(.) — функция выбора.
Данное свойство является:
♦ формулировкой транзитивности отношения выявленного предпочтения;
♦ формулировкой аксиомы выявленных предпочтений, в которой допущена ошибка;
♦ формулировкой аксиомы выявленных предпочтений.

8. Отношение выявленного предпочтения обладает свойством полноты, если…
♦ правило выбора задано на множестве всех подмножеств множества альтернатив;
♦ отношение выявленного предпочтения отрицательно транзитивно;
♦ отношение выявленного отношения удовлетворяет аксиоме выявленных предпочтений.

9. Пусть множество альтернатив X конечно и состоит из 3-х элементов $X=\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$. Участник осуществляет свой выбор на его подмножествах $A_1 = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$, $A_2=\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$. Выбор участника описывается функцией выбора C(.).

Отношение выявленного предпочтения заданное для данной ситуации
- ♦ не будет удовлетворять аксиоме выявленных предпочтений;
- ♦ не будет полным;
- ♦ будет обладать свойством транзитивности.

10. Одно из необходимых условий для того, чтобы отношение выявленного предпочтения было транзитивно состоит в том, что
- ♦ правило выбора непрерывно;
- ♦ отношение выявленного предпочтения рефлексивно;
- ♦ правило выбора задается на всех трехэлементных подмножествах множества альтернатив.

11. Пусть функция $C_{\succ}(.)$ сопоставляет каждому непустому подмножеству A множества X совокупность его наилучших по $\succ$ элементов

$$(C_{\succ}(A) \equiv (\boldsymbol{x} \in A \mid \text{не существует } \boldsymbol{y} \in A, \text{ такой, что } \boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x}).$$

Покажите, что если нестрогое и строгое отношения предпочтения связаны соотношением

$$\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}, \text{ но не } \boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x},$$

то построенные на их основе правила выбора совпадут, то есть область определения $\mathcal{A}$ у них будет одинаковой и

$$C_{\succ}(A) = C_{\succeq}(A)\ \forall\ A \in \mathcal{A}.$$

12. Пусть множество альтернатив X конечно, определенное на нем отношение предпочтения $\succ$ антисимметрично и отрицательно транзитивно, а функция $C(.)$ сопоставляет каждому непустому подмножеству A множества X совокупность его наилучших по $\succ$ элементов

$(C_{\succ}(A) \equiv (\boldsymbol{x} \in A \mid \text{не существует } \boldsymbol{y} \in A, \text{ такой, что } \boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x})$.

Покажите, что

(1) для всякого A множество $C_{\succ}(A)$ не пусто, а функция $C_{\succ}(A)$ удовлетворяет аксиоме выявленных предпочтений Хаутеккера;

(2) если $C(A) \subseteq A$ — произвольная функция выбора, сопоставляющая каждому непустому подмножеству A непустое подмножество его элементов и удовлетворяющая аксиоме выбора Хаутеккера, то существует антисимметричное и отрицательно транзитивное отношение предпочтения $\succ$, такое что

$$C(A) = C_{\succ}(A).$$

1.3. Представление предпочтений функцией полезности

Мы показали при достаточно естественных предположениях эквивалентность трех подходов к описанию предпочтений участников:
- ❖ Первоначально задано нестрогое отношение предпочтения;
- ❖ Первоначально задано строгое отношение предпочтения;

❖ Первоначально задана функция выбора участника на множестве ситуаций выбора.

Далее мы будем строить свои рассуждения, беря за основу нестрогое отношение предпочтения, но следует отметить, что нижеприведенные рассуждения можно перенести на случай двух других походов. В этом разделе мы рассмотрим условия, при которых на основании нестрогого отношения можно получить числовой индикатор полезности (функцию полезности) с некоторыми наперед заданными свойствами.

Удобно (особенно в приложениях теории) иметь дело с ситуациями, когда предпочтения потребителя описываются функцией полезности. Мы всюду будем предполагать, что область значения функции полезности — это действительная прямая, т.е. данная функция является вещественнозначной.

Определение 12.

Будем называть $u(.)\colon X\to\mathbb{R}$ **функцией полезности** потребителя, соответствующей нестрогому отношению предпочтения $\succeq$, если для всякой пары альтернатив $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in X$ $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$ верно тогда и только тогда, когда $u(\boldsymbol{x})\geqslant u(\boldsymbol{y})$, т.е.

$$\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y} \iff u(\boldsymbol{x})\geqslant u(\boldsymbol{y}).$$

Какие свойства предпочтений (и множества альтернатив, на которых заданы предпочтения) гарантируют существование функции полезности?

Следующее утверждение описывает необходимое условие существования функции полезности.

Утверждение 9.

Если функция полезности существует, то нестрогое отношение предпочтения является

(1) полным,

(2) транзитивным.

<u>Доказательство</u>:

(1) Для любой пары альтернатив $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in X$ выполняется по крайней мере одно из неравенств $u(\boldsymbol{x})\geqslant u(\boldsymbol{y})$ и $u(\boldsymbol{y})\geqslant u(\boldsymbol{x})$. Поэтому либо $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$, либо $\boldsymbol{y}\succeq\boldsymbol{x}$.

(2) Пусть для $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\in X$ выполняются соотношения $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y}\succeq\boldsymbol{z}$. По определению функции полезности это означает, что $u(\boldsymbol{x})\geqslant u(\boldsymbol{y})\geqslant u(\boldsymbol{z})$. Из $u(\boldsymbol{x})\geqslant u(\boldsymbol{z})$ следует, что $\boldsymbol{x}\succeq\boldsymbol{z}$.

■

Отметим, что когда множества альтернатив не более чем счетное, условия полноты и транзитивности являются и достаточными для существования функции полезности. Множество альтернатив будет счетным, например, когда товары потребляются только в целых количествах.

Утверждение 10.

Если множество альтернатив счетно, то для любого полного и транзитивного нестрогого отношения предпочтения существует функция полезности.

Доказательство:

Пусть множество альтернатив счетно. Тогда его можно представить в виде последовательности альтернатив $\boldsymbol{x}^i$, i=1, 2, ... Доказательство утверждения строится в виде алгоритма.

Пусть мы уже присвоили величину полезности первым N альтернативам из данной последовательности. Требуется присвоить величину полезности альтернативе $\boldsymbol{x}^{N+1}$. Рассмотрим два подмножества множества $A^N = \{\boldsymbol{x}^1,..., \boldsymbol{x}^N\}$:

$$A^N_+ = \{\boldsymbol{x}\in A^N \,|\, \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{x}^{N+1}\} \quad \text{и} \qquad A^N_- = \{\boldsymbol{x}\in A^N \,|\, \boldsymbol{x}^{N+1} \succeq \boldsymbol{x}\}.$$

Обозначим $\bar{\boldsymbol{x}}$ такой элемент множества A^N_+, что $\boldsymbol{x} \succeq \bar{\boldsymbol{x}}\ \forall\ \boldsymbol{x}\in A^N_+$. В случае неединственности такого элемента берем любой из них. Так же точно обозначим $\tilde{\boldsymbol{x}}$ такой элемент множества A^N_-, что $\tilde{\boldsymbol{x}} \succeq \boldsymbol{x}\ \forall \boldsymbol{x}\in A^N_-$. Существование $\bar{\boldsymbol{x}}$ (при непустом множестве A^N_+) и $\tilde{\boldsymbol{x}}$ (при непустом множестве A^N_-) следует из полноты и транзитивности отношения $\succeq$. Доказательство этого оставляется в качестве упражнения.

Возможны 4 случая:

- ♦ $A^N_+ = \varnothing$. Тогда можно взять $u(\boldsymbol{x}^{N+1}) = u(\tilde{\boldsymbol{x}}) + 1$.
- ♦ $A^N_- = \varnothing$. Тогда можно взять $u(\boldsymbol{x}^{N+1}) = u(\bar{\boldsymbol{x}}) - 1$.
- ♦ $A^N_+ \cap A^N_- = \varnothing$. Тогда можно взять $u(\boldsymbol{x}^{N+1}) = (u(\bar{\boldsymbol{x}}) + u(\tilde{\boldsymbol{x}}))/2$.
- ♦ $A^N_+ \cap A^N_- \neq \varnothing$. В этом случае берем $u(\boldsymbol{x}^{N+1}) = u(\boldsymbol{x})$, где $\boldsymbol{x}$ — произвольный элемент множества $A^N_+ \cap A^N_-$ (по построению все элементы множества $A^N_+ \cap A^N_-$ имеют одну и ту же полезность).

Чтобы закончить алгоритм, положим $A^1 = \{\boldsymbol{x}^1\}$ и $u(\boldsymbol{x}^1) = 0$. Заметим, что при таком построении функции полезности свойство

$$\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y} \iff u(\boldsymbol{x}) \geqslant u(\boldsymbol{y})$$

выполнено $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A^N$ при любом N. Поэтому построенная таким образом функция $u(.)$ действительно является функцией полезности.

■

Если же множество альтернатив не является счетным, то утверждение в общем случае неверно, что показывает, например, нестрогое отношение предпочтения на основе лексикографического упорядочения потребительских наборов из $\mathbb{R}^l_+$.

Лексикографическое упорядочение называется так, поскольку оно подобно правилу расположения слов в словаре. Для простоты рассмотрим в качестве множества допустимых альтернатив положительный ортант двумерного пространства, т.е. X=$\mathbb{R}^2_+$. Зададим бинарное отношение $\succeq^{\mathrm{L}}$ определяемое по правилу

$$\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X \quad (\boldsymbol{x} \succeq^{\mathrm{L}} \boldsymbol{y}) \Leftrightarrow (\ (x_1 > y_1) \text{ или } (\ x_1 = y_1,\ x_2 \geqslant y_2)\ ).$$

Как нетрудно показать, этот бинарное отношение обладает свойствами полноты и транзитивности. Однако, оно не представляется никаким численным индикатором. Докажем последнее.

Предположим противное. Пусть существует некоторая функция полезности (принимающая действительные значения) такая, что

$$\boldsymbol{x} \succeq^{L} \boldsymbol{y} \;\Leftrightarrow\; u_L(x_1, x_2) \geqslant u_L(y_1, y_2).$$

Сопоставим каждому действительному числу x_1 некоторое рациональное число $r(x_1)$ такое, что

$$u_L(x_1, 2) > r(x_1) > u_L(x_1, 1).$$

Заметим, что если $x_1 > x_1'$, то по определению лексикографического упорядочения имеем

$$u_L(x_1, 1) > u_L(x_1', 2).$$

Кроме того,

$$u_L(x_1, 2) > r(x_1) > u_L(x_1, 1) \text{ и } u_L(x_1', 2) > r(x_1') > u_L(x_1', 1).$$

В силу этих соотношений имеем

$$r(x_1) > u_L(x_1, 1) > u_L(x_1', 2) > r(x_1')$$

и тем самым из того, что $x_1 > x_1'$ имеем, что $r(x_1) > r(x_1')$. В силу этого $r(.)$ является взаимооднозначной функцией, область определения которой — вещественные числа, а область значения — рациональные (точнее сказать, некоторое подмножества множества рациональных чисел), но это невозможно, так как невозможно построить взаимооднозначное соответствие между счетным и несчетным множествами. Таким образом, мы пришли к противоречию, и, тем самым доказали, что не существует функции полезности, соответствующей лексикографическому упорядочиванию.

Отметим, однако, что все-таки существует ряд случаев, для которых можно гарантировать существование функции полезности в случае несчетного множества альтернатив. Например, функция полезности существует, если предпочтения непрерывны.

Определение 13.

Отношение $\Re$ называется непрерывным, если для любых сходящихся последовательностей $\{\boldsymbol{x}_n\}$, $\{\boldsymbol{y}_n\}$, таких что $\boldsymbol{x}_n \,\Re\, \boldsymbol{y}_n$, выполнено $\boldsymbol{x} \,\Re\, \boldsymbol{y}$, где $\boldsymbol{x} = \lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n$ и где $\boldsymbol{y} = \lim_{n\to\infty}\boldsymbol{y}_n$.

Несложно показать, что если функция полезности $u(\boldsymbol{x})$ непрерывна, то нестрогое отношение предпочтения $\succeq$ непрерывно. Дебре доказал и обратное:

Утверждение 11.

Пусть нестрогое отношение предпочтения $\succeq$ полно, транзитивно и непрерывно. Тогда существует представляющая его непрерывная функция полезности.

Доказательство этого результата сложно, поэтому приводим его без доказательства. Ниже мы докажем более слабое утверждение.

Рассмотрим теперь дополнительные качественные свойства, которыми могут обладать предпочтения. Наиболее естественным из них является свойство монотонности, которое гарантирует нам, что полезность индивидуума возрастает при росте количества потребляемых товаров.

Определение 14.
Отношение предпочтения является монотонным, если из $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{y}$ следует $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$. Отношение предпочтения является строго монотонным, если из $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ следует $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$.

Утверждение 12.
Пусть нестрогое отношение предпочтения $\succeq$, определенное на $X = \mathbb{R}^l_+$, полно, транзитивно, строго монотонно и непрерывно. Тогда существует представляющая его строго монотонная непрерывная функция полезности.

Доказательство:
В качестве функции полезности можно взять соответствие, которое сопоставляет каждому $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^l_+$ такое число $u(\boldsymbol{x})$, что

$\boldsymbol{x} \sim u(\boldsymbol{x})\,\mathbf{1}$,

где $\mathbf{1}$ — l-мерный вектор, состоящий из единиц. Покажем, что такое число $u(\boldsymbol{x})$ всегда существует и единственно.

Для этого мы должны найти для каждого набора $\boldsymbol{x}$ эквивалентный ему набор из множества $U = \{u\mathbf{1} \mid u\in\mathbb{R}_+\}$, которое является лучом, выходящим из начала координат. Сопоставим рассматриваемому набору $\boldsymbol{x}$ множество чисел u, соответствующих не худшим наборам из U

$$U^+(\boldsymbol{x}) = \{u \in\mathbb{R}_+ \mid u\,\mathbf{1} \succeq \boldsymbol{x}\}$$

и множество чисел u, соответствующих не лучшим наборам из U

$$U^-(\boldsymbol{x}) = \{u \in\mathbb{R}_+ \mid \boldsymbol{x} \succeq u\,\mathbf{1}\}.$$

Эти множества не пусты, так как из свойства строгой монотонности следует, что

$$0\in U^-(\boldsymbol{x}) \quad \text{и} \quad \max\{x_k\}\in U^+(\boldsymbol{x}) \text{ (максимальный элемент вектора } \boldsymbol{x}\text{)}.$$

Множество $U^+(\boldsymbol{x})$ лежит выше $U^-(\boldsymbol{x})$ поскольку из строгой монотонности следует, что $\forall u_1\in U^-(\boldsymbol{x})$ и $\forall u_2\in U^+(\boldsymbol{x})$ выполнено $u_1\leqslant u_2$.

Обозначим $u^+ = \inf\{U^+(\boldsymbol{x})\}$ и $u^- = \sup\{U^-(\boldsymbol{x})\}$. Эти величины конечны, так как множества $U^-(\boldsymbol{x})$ и $U^+(\boldsymbol{x})$ ограничены сверху и снизу соответственно. По непрерывности предпочтений $u^+\in U^+(\boldsymbol{x})$ и $u^-\in U^-(\boldsymbol{x})$. При этом $u^+ \geqslant u^-$. Покажем, что $u^+ = u^-$. Пусть это не так. Тогда существует число u' такое, что $u^- < u' < u^+$, так что $u'\notin U^-(\boldsymbol{x})$ и $u'\notin U^+(\boldsymbol{x})$. Это противоречит полноте предпочтений, так как либо $u'\,\mathbf{1} \succeq \boldsymbol{x}$, либо $u'\,\mathbf{1} \preceq \boldsymbol{x}$.

Полученная точка $u = u^+ = u^-$ удовлетворяет требуемому условию $\boldsymbol{x} \sim u\,\mathbf{1}$ и единственна.

Заданная таким образом функция $u(\boldsymbol{x})$ является функцией полезности. Пусть $\boldsymbol{x}_1 \succeq \boldsymbol{x}_2$. По построению $\boldsymbol{x}_1 \sim u(\boldsymbol{x}_1)\,\mathbf{1}$ и $\boldsymbol{x}_2 \sim u(\boldsymbol{x}_2)\,\mathbf{1}$. Значит, $\boldsymbol{x}_1 \succeq \boldsymbol{x}_2$ тогда и только тогда, когда $u(\boldsymbol{x}_1)\,\mathbf{1} \succeq u(\boldsymbol{x}_2)\,\mathbf{1}$. Но из строгой монотонности $u(\boldsymbol{x}_1)\,\mathbf{1} \succeq u(\boldsymbol{x}_2)\mathbf{1}$ тогда и только тогда, когда $u(\boldsymbol{x}_1) \geqslant u(\boldsymbol{x}_2)$.

Функция полезности $u(\boldsymbol{x})$ является строго монотонной. Пусть $\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{x}_2$ и $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$. Тогда из строгой монотонности предпочтений $\boldsymbol{x}_1 \succ \boldsymbol{x}_2$. Отсюда следует, что $u(\boldsymbol{x}_1)\,\mathbf{1} \succ u(\boldsymbol{x}_2)\mathbf{1}$. Поэтому $u(\boldsymbol{x}_1) > u(\boldsymbol{x}_2)$.

Докажем теперь непрерывность функции полезности $u(\boldsymbol{x})$. Для доказательства непрерывности функции полезности рассмотрим последовательность $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$. Нам надо показать, что $\lim_{n\to\infty} u(\boldsymbol{x}_n) = u(\boldsymbol{x})$. Зафиксируем некоторое число $\varepsilon > 0$. Заметим, что можно выбрать $\underline{u}$ и $\bar{u}$ такие, что для любого вектора $\boldsymbol{y}$ из ε-окрестности точки $\boldsymbol{x}$ (т.е. $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| \leqslant \varepsilon$) выполнено

$$\underline{u}\,\mathbf{1} \ll \boldsymbol{y} \ll \bar{u}\,\mathbf{1}.$$

Например, можно взять $\underline{u} = \min_{\mathrm{k}}\{x_{\mathrm{k}}\} - 2\varepsilon$ и $\bar{u} = \max_{\mathrm{k}}\{x_{\mathrm{k}}\} + 2\varepsilon$. Как нетрудно заметить, по строгой монотонности мы имеем $\underline{u} < u(\boldsymbol{y}) < \bar{u}$. Для любой сходящейся подпоследовательности из $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ найдется достаточно большое число N, такое что при $n > N$ имеем $\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\| \leqslant \varepsilon$, т.е. последовательность начиная с номера $N+1$ попадает в ε-окрестность точки $\boldsymbol{x}$. Тогда, как мы показали выше, $u(\boldsymbol{x}_n)$ попадает в интервал $[\underline{u}, \bar{u}]$.

Покажем теперь, что любая сходящаяся подпоследовательность из последовательности $\{u(\boldsymbol{x}_n)\}_{n=N+1}^{\infty}$ сходится к одному и тому же числу $u(\boldsymbol{x})$. (Отметим, что так как бесконечная последовательность $\{u(\boldsymbol{x}_n)\}_{n=N+1}^{\infty}$ задана на компакте $[\underline{u}, \bar{u}]$, то она должна иметь точки сгущения. Мы хотим показать что существует всего одна точка сгущения и это $u(\boldsymbol{x})$.)

Рассмотрим теперь некоторую сходящуюся подпоследовательность $\{u(\boldsymbol{x}_{n_k})\}_{\mathrm{k}=1}^{\infty}$ из $\{u(\boldsymbol{x}_n)\}_{n=N+1}^{\infty}$. Пусть эта последовательность сходится к $\tilde{u}$ и при этом $\tilde{u} \neq u(\boldsymbol{x})$. Предположим что $\tilde{u} > u(\boldsymbol{x})$. Возьмем некоторое число $\hat{u}$, такое что $\tilde{u} > \hat{u} > u(\boldsymbol{x})$. По свойству строгой монотонности имеем, что $\hat{u}\,\mathbf{1} \succ u(\boldsymbol{x})\,\mathbf{1}$. Поскольку $\{u(\boldsymbol{x}_{n_k})\}_{\mathrm{k}=1}^{\infty}$ сходится к $\tilde{u}$, то существует M такое, что при $k > M$ выполнено $u(\boldsymbol{x}_{n_k}) > \hat{u}$. По определению функции полезности $\boldsymbol{x}_{n_k} \sim u(\boldsymbol{x}_{n_k})\mathbf{1}$ и, кроме того, по строгой монотонности $u(\boldsymbol{x}_{n_k})\mathbf{1} \succ \hat{u}\mathbf{1}$ ($\forall\ k > M$), т.е. $\boldsymbol{x}_{n_k} \sim u(\boldsymbol{x}_{n_k})\,\mathbf{1} \succ \hat{u}\,\mathbf{1}$. Так как предпочтения непрерывны, то $\boldsymbol{x} \succeq \hat{u}\,\mathbf{1}$, но $\boldsymbol{x} \sim u(\boldsymbol{x})\mathbf{1}$, поэтому $u(\boldsymbol{x})\,\mathbf{1} \succeq \hat{u}\,\mathbf{1}$. Однако выше было показано, что $\hat{u}\,\mathbf{1} \succ u(\boldsymbol{x})\,\mathbf{1}$. Получили противоречие и тем самым доказали непрерывность построенной функции полезности.

■

Ряд нижеприведенных свойств отношений предпочтений и представляющих их функций полезности используются при характеристике важных частных случаев моделей рационального поведения.

Вместо свойства строгой монотонности часто можно использовать более слабое свойство локальной ненасыщаемости. Локальной ненасыщаемости обычно оказывается достаточно для доказательства тех свойств выбора, которые следуют из строгой монотонности предпочтений.

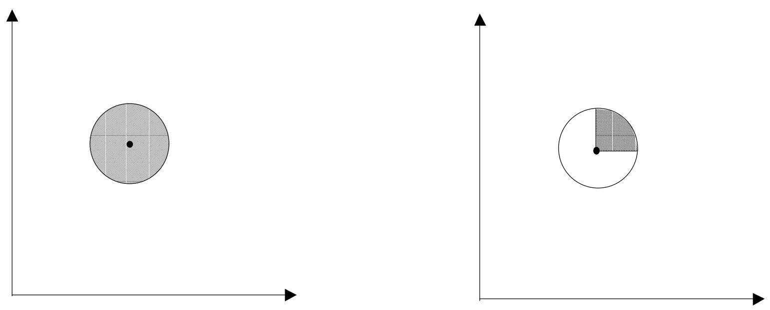
Определение 15.

Предпочтения называются локально ненасыщаемыми, если для любого допустимого набора $\boldsymbol{x}$ в любой его окрестности найдется другой допустимый набор $\hat{\boldsymbol{x}}$, такой что $\boldsymbol{x} \prec \hat{\boldsymbol{x}}$.

(Под ε-окрестностью точки $\boldsymbol{x}^*$ можно понимать множество таких точек $\boldsymbol{x}$, что $\sqrt{\sum (x_i - x_i^*)^2} \leqslant \varepsilon$, т. е. сфера радиуса ε с центром в точке $\boldsymbol{x}^*$).

На рисунке заштрихованы области, в которых могут быть лучшие наборы при локальной ненасыщаемости и при строгой монотонности предпочтений.

Довольно простое поведение потребителя (линейность кривых Энгеля) получаем в ситуации так называемых гомотетичных предпочтений.



Для локальной ненасыщаемости Для строгой монотонности

Рисунок 1

Определение 16.
Отношение предпочтения называется гомотетичным , если
(1) для каждого положительного t $t\boldsymbol{x} \in X$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x} \in X$.
(2) для каждого положительного t соотношение

$$t\boldsymbol{x} \succ t\boldsymbol{y}$$

выполняется тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}.$$

Отметим, для гомотетичных предпочтений существует однородная функция полезности, представляющая такие предпочтения. Такая характеристика предпочтений позволяет получать сильные результаты, касающиеся поведения потребителей и состояний равновесия, и активно эксплуатируется в теории международной торговли и в макроэкономике при анализе агрегированного спроса.

Следующее свойство, характеризующее «регулярный» случай, рассматриваемый в экономической теории, важно для демонстрации «хороших» свойств функции выбора и доказательства существования равновесия.

Здесь и далее мы будем предполагать, что множество X выпукло.

Определение 17.

Предпочтения являются **выпуклыми**, если $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$: $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ выполнено $\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\,\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{y}$.

Предпочтения являются **строго выпуклыми**, если $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$: $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ и $0 < \alpha < 1$ выполнено $\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\,\boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{y}$.

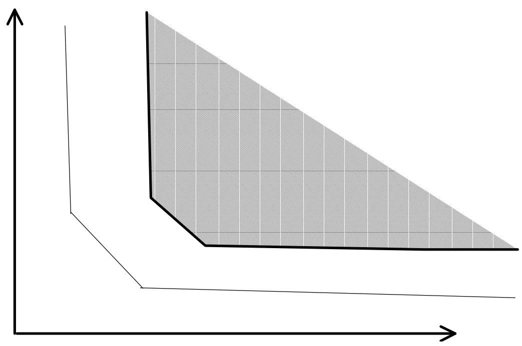


Рисунок 2. Пример выпуклых, но не строго выпуклых предпочтений

Напомним, что функция $u(.)$ — вогнута, если

$$u(\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \geqslant \alpha u(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha)\,u(\boldsymbol{y})\ \forall\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Известно, что дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(.)$ вогнута тогда и только тогда, когда ее матрица вторых производных (матрица Гессе) $\boldsymbol{H}$ отрицательно полуопределена, т.е. $\boldsymbol{z}'\boldsymbol{H}\boldsymbol{z} \leqslant 0\ \forall \boldsymbol{z}$.

Утверждение 13.

Если функция полезности вогнута, то представляемые ею предпочтения выпуклы.

Доказательство:

По определению вогнутости $u(.)$ имеем, что $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$

$$u(\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \geqslant \alpha u(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha)\,u(\boldsymbol{y})\ \forall\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

Без потери общности считаем, что $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$. Тогда $u(\boldsymbol{x}) \geqslant u(\boldsymbol{y})$, откуда

$$u(\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \geqslant u(\boldsymbol{y}).$$

Воспользовавшись определением функции полезности получим, что

$$\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{y}\ \ \forall\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

■

Обратное не всегда верно. Выпуклость предпочтений эквивалентна квазивогнутости функции полезности.

Напомним, что функция $u(.)$ — квазивогнута, если

$$u(\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \geqslant \min(u(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{y}))\ \forall\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Известно, что дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(.)$ квазивогнута тогда и только тогда, когда ее матрица вторых производных $\boldsymbol{H}$ отрицательно полуопределена на гиперплоскости $\nabla u(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{z} = 0$, т.е.

$$\boldsymbol{z}'\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{z} \leqslant 0 \text{ для каждого } \boldsymbol{z}, \text{ такого что } \nabla u(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{z} = 0.$$

Утверждение 14.

Функция полезности квазивогнута тогда и только тогда, когда представляемые ею предпочтения выпуклы.

<u>Доказательство</u>:

Покажем, что из квазивогнутости функции полезности следует выпуклость представляемых ею предпочтений.

По определению квазивогнутости $u(.)$ имеем, что $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$

$$u(\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \geqslant \min(u(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{y}))\ \forall\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Без потери общности считаем, что $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$. Тогда $u(\boldsymbol{x}) \geqslant u(\boldsymbol{y})$, откуда

$$u(\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \geqslant u(\boldsymbol{y}).$$

Воспользовавшись определением функции полезности получим, что

$$\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{y}\ \ \forall\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Теперь покажем обратное. Считаем, что $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$. Тогда по определению выпуклости предпочтений

$$\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{y}\ \ \forall\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

По определению функции полезности

$$u(\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \geqslant u(\boldsymbol{y}) = \min(u(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{y}))\ \forall\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

■

Помимо вогнутости функции, нам в дальнейшем понадобится понятие строгой вогнутости и строгой квазивогнутости. Функция $u(.)$ — строго вогнута, если

$$u(\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) > \alpha u(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha)\,u(\boldsymbol{y})\ \forall\ 0 < \alpha < 1.$$

Функция $u(.)$ — строго квазивогнута, если

$$u(\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) > \min(u(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{y}))\ \forall\ 0 < \alpha < 1.$$

Основная цель данного параграфа состояла в том, чтобы показать, какие свойства предпочтений гарантируют существования функции полезности и указать на связи между характеристиками предпочтений и соответствующими им свойствами представляющих их функций полезности. Но, кроме этого мы косвенно показали, что функция полезности, представляющая заданные предпочтения, не единственна.

При моделировании предпочтений потребителя часто рассматриваются два подхода: ординалистский и кардиналистский. Ординалистский подход предполагает, что все функции $u(.)$, которые удовлетворяют свойству $u(\boldsymbol{x}) \geqslant u(\boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$ эквивалентны при описании поведения потребителя. Кардиналистский же подход предполагает, что среди этого семейства функций существует подмножество особых функций, обладающих более «глубокими» свойствами, в том смысле, что с их помощью можно измерить «истинную» полезность, которую получает индивидуум от каждого из наборов благ. Эти функции позволяют сравнивать потребительские наборы количественно, чего нельзя сделать при ординалистском подходе, так как разница величина полезности в последнем случае не имеет содержательной интерпретации.

<u>Тесты и задачи для самостоятельного решения</u>

1. Если множество альтернатив конечно, то для существования функции полезности достаточно чтобы
- ♦ предпочтения удовлетворяли аксиоме Хаутеккера
- ♦ предпочтения были полны и транзитивны
- ♦ предпочтения были лексикографически упорядочены

2. Лексикографический порядок не может быть представлен функцией полезности потому что
- ♦ он не является непрерывным
- ♦ он является полным
- ♦ он удовлетворяет свойству монотонности

3. Свойства функции полезности, которые сохраняются при строго возрастающем преобразовании, называются
- ♦ ординальными
- ♦ кардинальными
- ♦ не обозначаются специальным термином

4. Свойство локальной ненасыщаемости следует из свойства
- ♦ монотонности
- ♦ полноты и выпуклости предпочтений
- ♦ строгой монотонности

5. Пусть предпочтения являются полными, транзитивными и непрерывными, тогда
- ♦ эти предпочтения гомотетичны
- ♦ функция полезности существует, непрерывна и субаддитивна
- ♦ существует представляющая их непрерывная функция полезности

6. Какое из преобразований функции полезности всегда не меняет ее ординалистского характера
- ♦ неубывающее
- ♦ возрастающее
- ♦ квазивогнутое

7. Предпочтения, задаваемые положительно однородной функцией полезности
- ♦ выпуклы и гомотетичны
- ♦ строго монотонны и гомотетичны
- ♦ гомотетичны

8. Если предпочтения представимы функцией полезности, то они
- ♦ полны и транзитивны
- ♦ полны, транзитивны и выпуклы
- ♦ полны, транзитивны и непрерывны

9. Какое из нижеприведенных утверждений верно
- ♦ Если отношение предпочтения монотонно, то оно строго монотонно
- ♦ Если отношение предпочтения строго монотонно, то оно локально ненасыщаемо
- ♦ Если отношение предпочтения монотонно, то оно локально ненасыщаемо

10. Лексикографическое отношение предпочтения
- ♦ представимо дискретной, но не непрерывной функцией полезности
- ♦ обладает свойством непрерывности
- ♦ не представимо функцией полезности

11. Отношение предпочтения представимо функцией полезности, если оно
- ♦ полно, транзитивно, непрерывно
- ♦ ациклично, рефлексивно, полно
- ♦ полно, непрерывно, рефлексивно

12. Отношение предпочтения представимо функцией полезности, если
- ♦ множество альтернатив счетно, отношение предпочтения полно и транзитивно
- ♦ множество альтернатив счетно, отношение предпочтения полно и ациклично
- ♦ множество альтернатив конечно, отношение предпочтения транзитивно

13. Непрерывное, полное, транзитивное и строго монотонное отношение предпочтения гомотетично тогда и только тогда, когда
- ♦ оно представимо квазилинейной функцией полезности
- ♦ оно представимо функцией полезности однородной нулевой степени
- ♦ оно представимо функцией полезности однородной первой степени

14. Если функция полезности потребителя строго вогнута, то
- ♦ выполняется закон убывания предельной полезности
- ♦ она представляет локально ненасыщаемые предпочтения
- ♦ предельные полезности органичены сверху

15. Постройте функцию полезности для полного и транзитивного отношения предпочтения, заданного на конечном множестве альтернатив.

16. Покажите, что
(1) лексикографическое отношение предпочтения на множестве неотрицательных n-мерных векторов задает антисимметричное и отрицательно транзитивное отношение предпочтения,
(2) не существует представляющей его непрерывной функции полезности.

17. Говорят, что функция полезности $u(\boldsymbol{x})$ гомотетична, если она имеет вид:

$$u(\boldsymbol{x}) = g(v(\boldsymbol{x})),$$

где — $g(\boldsymbol{y})$ (строго) возрастающая, а $v(\boldsymbol{x})$ — однородная первой степени функция.

(а) Покажите, что (выпуклые, локально ненасыщаемые) предпочтения гомотетичны тогда и только тогда, когда существует представляющая их гомотетичная функция полезности.

(б) Покажите, что (выпуклые, локально ненасыщаемые) предпочтения гомотетичны тогда и только тогда, когда существует представляющая их функция полезности, являющаяся положительно однородной первой степени.

18. Покажите, что из строгой монотонности предпочтений следует их локальная ненасыщаемость.

19. Покажите, что если функция полезности $u(\boldsymbol{x})$ непрерывна, то нестрогое отношение предпочтения $\succsim$ непрерывно.

20. Покажите, что функция полезности монотонна тогда и только тогда, когда представляемые ею отношения монотонны.

21. Пусть X состоит из n-мерных векторов (с неотрицательными компонентами), а отношение задано следующим образом: $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$, если все компоненты вектора $\boldsymbol{x}$ (строго) больше соответствующих компонент вектора $\boldsymbol{y}$. Существует ли функция полезности, представляющая это предпочтение?

22. Покажите, что отношение предпочтения, задаваемые положительно однородной (первой степени) функцией полезности, гомотетично.

23. Приведите пример выпуклых локально ненасыщаемых предпочтений, которые не обладают свойством монотонности.

24. Приведите пример выпуклых, монотонных предпочтений, которые не являются локально ненасыщаемыми.

25. Покажите, что строго выпуклые монотонные предпочтения локально ненасыщаемы.

26. Покажите, что если функция полезности строго вогнута, то представляемые ею предпочтения строго выпуклы.

27. Функция полезности строго квазивогнута тогда и только тогда, когда представляемые ею предпочтения строго выпуклы.

1.4. Задача потребителя. Характеристики потребительского выбора

Говоря нестрого, потребитель всегда выбирает из множества доступных ему альтернатив наилучшую (одну из наилучших). Доступные альтернативы в теории потребления — это доступные потребительские наборы, т.е. наборы, удовлетворяющие двум типам ограничений. Во-первых, это все “физические” ограничения на выбор потребителя (он не может работать более 24 часов в сутки, потреблять какое-то благо в отрицательных количествах и т.д.); все потребительские наборы, удовлетворяющие этим ограничениям, т.е. наборы, которые доступны потребителю без учета всевозможных институциональных ограничений, будем называть множеством допустимых альтернатив (потребительских наборов) и обозначать его через X. В дальнейшем, если не оговорено особо, в качестве X рассматривается множество $\mathbb{R}^l_+$.

Во-вторых, это всевозможные типы институциональных ограничений. Наиболее простой тип ограничений этого типа — это так назывемое бюджетное ограничение вальрасовского типа — требование ограничить стоимость потребительской корзины фиксированной суммой денег (бюджетом). Множество потребительских наборов, удовлетворяющих этому ограничению, называют бюджетным множеством. Таким образом, если $\boldsymbol{p}$ — вектор цен рассматриваемых благ, а R — доход потребителя, то его бюджетное множество имеет следующий вид:

$$\mathrm{B}(\boldsymbol{p}, R) = \{\boldsymbol{x} \in X \mid \boldsymbol{px} \leqslant R\}.$$

Таким образом, если потребитель сталкивается лишь с бюджетным ограничением, то его выбор — наилучший потребительский набор из бюджетного множества $\mathrm{B}(\boldsymbol{p}, R)$. По введенному ранее определению бюджетное множество $\mathrm{B}(\boldsymbol{p}, R)$ представляет собой частный случай *ситуации выбора*.

С учетом вышесказанного, в случае, когда предпочтения задаются функцией полезности, выбор рационального потребителя должен быть решением следующей задачи математического программирования (задачи максимизации полезности):

Задача 1 (**Задача потребителя**)

$$u(\boldsymbol{x}) \to \max$$

$$\boldsymbol{px} \leqslant R\,, \qquad (1\text{-}1)$$

$$\boldsymbol{x} \geqslant 0. \qquad (1\text{-}2)$$

Соотношение (1-2) выделяет множество допустимых альтернатив, а соотношение (1-1), — бюджетное ограничение, — выделяет, совместно с (1-2), бюджетное множество потребителя.

При положительных ценах, неотрицательном доходе и непрерывных предпочтениях (функции полезности) решение задачи существует, что легко показать, используя соответствующую теорему Вейерштрасса. Соответствие между бюджетным множеством В($\boldsymbol{p}$, R) и множеством решений задачи потребителя представляет собой то, что выше называлось *правилом выбора*. Строгая выпуклость предпочтений гарантирует единственность решения; в этом случае правило выбора есть функция спроса.

Определение 18. Пусть решение Задачи 1 существует и единственно для всех значений параметров — положительных ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе R. Тогда определена следующая функция, которая ставит в соответствие каждому набору цен и доходов решение задачи при этих параметрах — вектор $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$. Будем называть ее функцией спроса Маршалла. Если решение задачи при некоторых значениях параметров не единственно, то говорят об отображении спроса Маршалла.

В дальнейшем будем предполагать, если не оговорено противное, что

♦ маршаллианский спрос является функцией и определен для всех положительных цен и доходов;

♦ решение внутреннее: $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \overline{R}) \gg 0$;

♦ предпочтения локально ненасыщаемы (поэтому решение лежит на границе бюджетного множества, т.е. выполняется закон Вальраса).

Утверждение 15 (свойства маршаллианского спроса $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$) .

1. Отображение $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ однородно нулевой степени, т. е.

$$\boldsymbol{x}(\lambda\boldsymbol{p}, \lambda R) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R).$$

(Если цены и доходы изменятся в одно и то же число раз, то спрос не изменится.)

2. Если предпочтения потребителя выпуклы, то $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ — выпуклое множество.

3. Если предпочтения потребителя локально ненасыщаемы, то $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ удовлетворяет закону Вальраса, т.е. если $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$, то $\boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}} = R$. (Бюджетное ограничение выполняется как равенство.)

4. Если предпочтения потребителя строго выпуклы, то $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ — функция.

5. Если предпочтения потребителя непрерывны и строго выпуклы, то $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ — непрерывная функция.

Доказательство:

(1) Для доказательства однородности спроса по ценам и доходу отметим, что множество, на котором потребитель ищет лучший набор не меняется при одновременном умножении цен и доходов на некоторую положительную величину $\lambda > 0$, т.е. $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^l_+ \mid (\lambda\boldsymbol{p})\boldsymbol{x} \leqslant (\lambda R)\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^l_+ \mid \boldsymbol{px} \leqslant R\}$

(2) Пусть предпочтения индивидуума выпуклы, $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)$ не пусто и $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}''$ — два элемента из множества $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$, т.е. $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$. Рассмотрим потребительский набор $\tilde{\boldsymbol{x}} = \alpha\, \boldsymbol{x}' + (1 - \alpha)\, \boldsymbol{x}''$ ($0<\alpha<1$). Так как $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$, то по определению функции полезности $\boldsymbol{x}' \sim \boldsymbol{x}''$. По определению выпуклости предпочтений $\tilde{\boldsymbol{x}} \succeq \boldsymbol{x}' \sim \boldsymbol{x}''$. Кроме того набор $\tilde{\boldsymbol{x}}$ является допустимым в задаче потребителя. В силу этого $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)$. Тем самым получили выпуклость множества $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)$.

(3) Пусть $\tilde{\boldsymbol{x}}$ — решение задачи потребителя, и закон Вальраса не выполнен, т.е. $\boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}} < R$. Тогда по свойству локальной ненасыщаемости в любой окрестности точки $\tilde{\boldsymbol{x}}$ должен существовать набор $\hat{\boldsymbol{x}}$, такой, что $\hat{\boldsymbol{x}} \succ \tilde{\boldsymbol{x}}$. Если выбрать достаточно малую окрестность, то $\hat{\boldsymbol{x}}$ будет удовлетворять бюджетному ограничению ($\boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}} \leqslant R$), что противоречит оптимальности набора $\tilde{\boldsymbol{x}}$.

(4) Пусть предпочтения индивидуума строго выпуклы и $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}''$ — два различных элемента из множества $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$, т.е. $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$. Рассмотрим потребительский набор $\tilde{\boldsymbol{x}} = \alpha\boldsymbol{x}' + (1 - \alpha)\boldsymbol{x}''$ $(0 < \alpha < 1)$. Так как $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$, то $\boldsymbol{x}' \sim \boldsymbol{x}''$. По определению строгой выпуклости предпочтений имеем, что $\tilde{\boldsymbol{x}} \succ \boldsymbol{x}' \sim \boldsymbol{x}''$. Кроме того набор $\tilde{\boldsymbol{x}}$ допустим в задаче потребителя. В силу этих свойств получаем, что набор $\tilde{\boldsymbol{x}}$ допустим и, лучше наборов $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{x}''$, а это противоречит их оптимальности. Поэтому решение единственно, то есть $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ — (однозначная) функция. (Отметим еще раз, что существование следует из непрерывности функции полезности).

(5) Докажем непрерывность функции спроса. Рассмотрим последовательность $\{\boldsymbol{p}_n, R_n\}_{n=1}^{\infty} \to \{\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{R}\}$, где $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{R}) \gg \mathbb{0}$, и последовательность $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ решений задачи потребителя при ценах $\boldsymbol{p}_n$ и доходах R_n (т.е. $\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}_n, R_n)$), такую что $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \to \bar{\boldsymbol{x}}$.

Поскольку $\boldsymbol{p}_n\, \boldsymbol{x}_n \leqslant R_n$, то переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $\bar{\boldsymbol{p}}\,\bar{\boldsymbol{x}} \leqslant \bar{R}$.

Нам нужно показать, что $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{R})$, т.е. $\bar{\boldsymbol{x}}$ является оптимальным выбором потребителя при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$ и доходе $\bar{R}$. Предположим, что это не так, и существует такой набор $\hat{\boldsymbol{x}}$, что

$$u(\hat{\boldsymbol{x}}) > u(\bar{\boldsymbol{x}}) \text{ и } \bar{\boldsymbol{p}}\,\hat{\boldsymbol{x}} \leqslant \bar{R}.$$

Так как доход положителен, то существует потребительский набор $\tilde{\boldsymbol{x}}$ такой, что $u(\tilde{\boldsymbol{x}}) > u(\bar{\boldsymbol{x}})$ и $\bar{\boldsymbol{p}}\,\tilde{\boldsymbol{x}} < \bar{R}$. (Если $\hat{\boldsymbol{x}} \geqslant 0$ и $\hat{\boldsymbol{x}} \neq 0$, то можно подобрать $\boldsymbol{\varepsilon} \geqslant\neq 0$, так что $\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^l_+$. По непрерывности функции полезности найдется достаточно малая величина ε, такая что $u(\hat{\boldsymbol{x}} - \varepsilon) > u(\bar{\boldsymbol{x}})$. Тем самым мы нашли $\tilde{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}} - \varepsilon$, такой что $u(\tilde{\boldsymbol{x}}) > u(\bar{\boldsymbol{x}})$ и $\bar{\boldsymbol{p}}\,\tilde{\boldsymbol{x}} < \bar{R}$. Если же $\hat{\boldsymbol{x}} = 0$, то аналогичным образом найдется $\boldsymbol{\varepsilon} \geqslant\neq 0$, такое что $\tilde{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}} + \varepsilon$, дальнейшие рассуждения для этого случая совершенно аналогичны.)

Далее, найдется достаточно большое N такое, что при $n>N$ выполнено $\boldsymbol{p}_n\tilde{\boldsymbol{x}} < R_n$. Пусть это не так, т.е. существует такая возрастающая бесконечная последовательность натуральных чисел n_k, что $\boldsymbol{p}_{n_k}\tilde{\boldsymbol{x}} \geqslant R_{n_k}$ $\forall k$. Тогда, перейдя к пределу, мы получили бы $\bar{\boldsymbol{p}}\,\tilde{\boldsymbol{x}} \geqslant \bar{R}$, что противоречит выбору $\tilde{\boldsymbol{x}}$.

Для каждого n, такого что $\boldsymbol{p}_n\tilde{\boldsymbol{x}} < R_n$ в силу оптимальности $\boldsymbol{x}_n$ мы должны иметь $u(\boldsymbol{x}_n) > u(\tilde{\boldsymbol{x}})$. Так как функция полезности непрерывна, то, переходя к пределу, получаем $u(\bar{\boldsymbol{x}}) \geqslant u(\tilde{\boldsymbol{x}})$. Тем самым мы пришли к противоречию. Это означает, что набор $\bar{\boldsymbol{x}}$ оптимален при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$ и доходе $\bar{R}$, т.е. $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{R})$. Таким образом, доказана непрерывность функции спроса $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)$ по ценам и доходу.

Замечание. В общем случае можно показать, что отображение спроса имеет замкнутый график, используя, с незначительными изменениями предложенную схему доказательства.

■

Одним из ключевых понятий теории потребителя является понятие непрямой функции полезности. Ниже мы даем его определения и основные свойства.

Определение 19. Непрямая функция полезности $v(\boldsymbol{p}, R) = u(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R))$ есть значение целевой функции Задачи 1 при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе R в точке оптимума.

Утверждение 16 (свойства непрямой функции полезности $v(\boldsymbol{p}, R)$)

Пусть предпочтения потребителя представляются непрерывной функцией полезности $u(\boldsymbol{x})$. Тогда

1) $v(\boldsymbol{p}, R)$ однородна нулевой степени: $v(\lambda \boldsymbol{p}, \lambda R) = v(\boldsymbol{p}, R)$.

2) $v(.)$ не убывает по доходу ($v(\boldsymbol{p}, R') \geqslant v(\boldsymbol{p}, R)$ при $R'>R$), причем строго возрастает по доходу, если предпочтения локально ненасыщаемы ($v(\boldsymbol{p}, R') > v(\boldsymbol{p}, R)$ при $R'>R$).

3) $v(.)$ не возрастает по ценам ($v(\boldsymbol{p}, R) \leqslant v(\boldsymbol{p}', R)$ при $\boldsymbol{p} \geqslant \boldsymbol{p}'$).

4) Функция $v(\boldsymbol{p}, R)$ непрерывна на множестве строго положительных цен и неотрицательных доходов, т. е. при $(\boldsymbol{p}, R) \in \mathbb{R}^l_{++}\times\mathbb{R}_+$.

5) Функция $v(\boldsymbol{p}, R)$ квазивыпукла.

Доказательство:

(1) Однородность нулевой степени следует из определения непрямой функции полезности и однородности нулевой степени функции спроса $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ (см. Утверждение 15).

(2) Покажем, что $v(\boldsymbol{p}, R)$ не убывает по R. Рассмотрим непрямую функцию полезности при двух разных уровнях дохода R' и R, таких что $R'>R$. Поскольку при $R'>R$ бюджетное множество $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^l_+ \mid \boldsymbol{px} \leqslant R'\}$ содержит бюджетное множество $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^l_+ \mid \boldsymbol{px} \leqslant R\}$, а непрямая функция полезности по определению есть максимум функции полезности на бюджетном множестве, то $v(\boldsymbol{p}, R') \geqslant v(\boldsymbol{p}, R)$.

Предположим, что предпочтения локально ненасыщаемы. Если бы при $R'>R$ мы имели $v(\boldsymbol{p}, R') = v(\boldsymbol{p}, R)$, то наборы из $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ принадлежали бы $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R')$, но для них не выполнялся бы закон Вальраса. Значит, должно выполняться строгое неравенство $v(\boldsymbol{p}, R') > v(\boldsymbol{p}, R)$, т.е. при локальной ненасыщаемости непрямая функция полезности возрастает по доходу.

(3) Доказательство невозрастания непрямой функции полезности $v(\boldsymbol{p}, R)$ по ценам $\boldsymbol{p}$ можно провести по той же схеме. Заметим, что при локальной ненасыщаемости предпочтений, если $\boldsymbol{p} \gg \boldsymbol{p}'$, то $v(\boldsymbol{p}, R) < v(\boldsymbol{p}', R)$.

(4) Непрерывность следует из определения непрямой функции полезности и непрерывности функции $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$, которую мы доказали в Утверждении 15 в предположении строгой выпуклости предпочтений. Доказательство в общем случае оставляем читателю.

(5) Мы хотим показать, что

$$v(\alpha\boldsymbol{p}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{p}_2, \alpha R_1 + (1-\alpha)R_2) \leqslant \max\{v(\boldsymbol{p}_1, R_1), v(\boldsymbol{p}_2, R_2)\}.$$

Пусть $\boldsymbol{x}$ — решение Задачи 1 при ценах $\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{p}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{p}_2$ и доходе $R = \alpha R_1 + (1-\alpha)R_2$, Сначала докажем, что $\boldsymbol{x}$ — допустимое решение Задачи 1 при ценах $\boldsymbol{p}_1$ и доходе R_1, либо при ценах $\boldsymbol{p}_2$ и доходе R_2.

Пусть $\boldsymbol{x}$ не является допустимым решением Задачи 1 ни при цене $\boldsymbol{p}_1$ и доходе R_1, ни при цене $\boldsymbol{p}_2$ и доходе R_2. Тогда $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x} > R_1$ и $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x} > R_2$.

Отсюда следует, что $\alpha\boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\mathrm{p}_2\boldsymbol{x} > \alpha R_1 + (1-\alpha)R_2$, что противоречит тому, что $\boldsymbol{x}$ — допустимое решение при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе R. Таким образом, либо $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x} \leqslant R_1$, либо $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x} \leqslant R_2$.

Предположим, например, что $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x} \leqslant R_1$.

Из того, что $\nu(\boldsymbol{p}_1, R_1)$ есть по определению значение целевой функции на оптимальном решении Задачи 1 при ценах $\boldsymbol{p}_1$ и доходах R_1, следует, что $\nu(\boldsymbol{p}_1,R_1) \geqslant u(\boldsymbol{x})$, так как $\boldsymbol{x}$ — допустимое решение этой задачи. Тем более должно выполняться и требуемое соотношение

$u(\boldsymbol{x}) = \nu(\alpha\boldsymbol{p}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{p}_2, \alpha R_1 + (1-\alpha)R_2) \leqslant \max\{\nu(\boldsymbol{p}_1, R_1), \nu(\boldsymbol{p}_2, R_2)\}$.

■

Если дополнительно предположить, что u является дифференцируемой функцией, то для характеристики решений Задачи 1 можно применить теорему Куна-Таккера:

Пусть $\bar{\boldsymbol{x}}$ — решение Задачи 1. При $R>0$ условие Слейтера выполнено. Из теоремы Куна-Таккера следует, что найдется множитель Лагранжа $\lambda \geqslant 0$, такой, что функция Лагранжа $L(\boldsymbol{x}, \lambda) = u(\boldsymbol{x}) + \lambda(R - \boldsymbol{px})$ Задачи 1 имеет в точке $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\lambda})$ производную по $\boldsymbol{x}_i$, не превышающую ноль. Другими словами, мы имеем необходимое условие оптимальности:

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{x}_i}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\lambda}) \leqslant \bar{\lambda}\, p_i.$$

В случае же внутреннего решения ($\bar{\boldsymbol{x}}\gg 0$) это условие принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{x}_i}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}\, p_i.$$

Можно показать, что двойственная оценка бюджетного ограничения Задачи 1 $\bar{\lambda}$ представляет собой (в случае внутреннего решения) производную непрямой функции полезности по доходу, т.е. $\bar{\lambda} = \dfrac{\partial\nu}{\partial R}(\boldsymbol{p}, R)$.

<u>Замечание.</u> Квазивыпуклость по доходу дифференцируемой непрямой функции полезности и ее строгая монотонность по доходу (которая следует из локальной ненасышаемости предпочтений) гарантируют положительность двойственной оценки ограничения всюду, за исключением не более чем счетного множества точек ее области определения. Таким образом, даже выпуклость предпочтений и их локальная ненасышаемость не гарантируют, вообще говоря, положительность оценки ограничений (положительность предельной полезности дохода при некоторых его уровнях). В ситуации же, когда существует вогнутая функция полезности, представляющая локально ненасыщаемые предпочтения, при любом уровне дохода его предельная полезность всегда положительна.

В большей части следующего ниже материала, который составляет ядро неоклассической теории поведения потребителей, мы, не вполне последовательны и уклоняемся от программы построения теории на основе только свойств предпочтений, часто считая некоторые свойства функций полезности заданными априорно, а не выводя их из характеристик лежащих в их основе предпочтений.

<u>Тесты и задачи для самостоятельного решения</u>

1. Если функция полезности однородна первой степени, то при увеличении дохода в 2 раза полезность индивидуума
♦ возрастет меньше чем в 2 раза
♦ возрастет в 2 раза
♦ упадет меньше чем в 2 раза

2. Если функция полезности однородна степени k, то при увеличении дохода в m раз полезность индивидуума
♦ возрастет в mk раз
♦ возрастет в m^k раз
♦ возрастет в m раз

3. Оптимальный выбор потребителя всегда лежит на бюджетной линии
если предпочтения
♦ локально ненасыщаемы
♦ выпуклы
♦ вогнуты

4. Задача потребителя всегда имеет решение, если
♦ цены и доход строго положительны, а функция полезности монотонна
♦ цены строго положительны и функция полезности непрерывна
♦ функция полезности непрерывна

5. Задача потребителя имеет единственное решение, если
♦ функция полезности вогнута и квазилинейна
♦ функция полезности квазивогнута
♦ функция полезности строго вогнута

6. Если функция полезности потребителя строго вогнута, то
♦ решение задачи потребителя единственно
♦ все товары потребляются в положительных количествах
♦ предельная полезность денег равна 0

7. Если предпочтения выпуклы и решение задачи максимизации полезности неединственное, то множество оптимальных решений
♦ может состять из конечного числа точек

♦ не всегда замкнуто
♦ всегда выпукло

8. Спрос потребителя удовлетворяет закону спроса всегда
♦ для нормальных благ
♦ для малоценных благ
♦ для товаров Гиффена

9. Пусть функция полезности локально ненасыщаема и непрерывна. Какие из нижеприведенных свойств функции спроса выполняются при этих предположениях.
1) спрос однороден нулевой степени по ценам и доходу
2) выполняется закон Вальраса
3) решение задачи единственное
4) решение внутреннее
♦ 1, 2
♦ 1, 2, 3
♦ 2, 3

10. Пусть функция полезности порождена локально ненасыщаемыми, непрерывными предпочтениями. Какие из нижеприведенных свойств характеризуют непрямую функцию полезности.
1) однородность нулевой степени по ценам
2) невозрастание по ценам
3) непрерывность по ценам и доходам
♦ 2, 3
♦ 1, 2
♦ 1, 3

11. Непрямая функция полезности
♦ квазивогнута по ценам и доходу
♦ выпукла по ценам и доходу
♦ квазивыпукла по ценам и доходу

12. Если функция полезности однородна первой степени, то ...
♦ непрямая функция полезности имеет вид $a(\boldsymbol{p})R$
♦ непрямая функция полезности имеет вид $a(\boldsymbol{p}) + R$
♦ непрямая функция полезности имеет вид $a(\boldsymbol{p})R + b(\boldsymbol{p})$, $b(\boldsymbol{p})>0$

13. Если функция полезности квазилинейна, то при достаточно большом доходе непрямая функция полезности имеет вид:
♦ $a(\boldsymbol{p})R$
♦ $a(\boldsymbol{p})R + b(\boldsymbol{p})$
♦ $a(\boldsymbol{p}R) + b(\boldsymbol{p})R$

14. Если функция полезности потребителя квазилинейна, то непрямая функция полезности
♦ квазивыпукла
♦ линейна
♦ имеет вид Гормана

15. Какие из нижеприведенных формул верны?
♦ $D_R\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)\boldsymbol{p} + D_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)R = 0$
♦ $D_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)R + D_R\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)\boldsymbol{p} = 0$
♦ $D_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)\boldsymbol{p} + D_R\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)R = 0$

16. Какие из нижеприведенных формул верны?
♦ $\boldsymbol{p}D_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R) + \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)^T = 0^{\mathrm{T}}$
♦ $\boldsymbol{p}D_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R) + \nu(\boldsymbol{p},R)^T = 0^{\mathrm{T}}$
♦ $\boldsymbol{p}D_{\boldsymbol{p}}\nu(\boldsymbol{p},R) + \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)^T = 0^{\mathrm{T}}$

17. Функция спроса потребителя положительно однородна первой степени по доходу и удовлетворяет закону Вальраса. Тогда...
♦ предпочтения гомотетичны
♦ функция спроса удовлетворяет аксиоме выявленных предпочтений
♦ эластичность спроса по доходу равна 1

18. Если предпочтение гомотетично, то
♦ эластичность спроса по доходу равна 1
♦ эффект дохода отсутствует
♦ потребительский излишек совпадает с компенсирующей вариацией

19. Пусть в экономике 2 товара. Функция полезности потребителя квазилинейна и первое благо входит в нее линейно. Тогда...
♦ предпочтения потребителя гомотетичны
♦ нарушаются кардинальные свойства функции полезности
♦ эластичность спроса по доходу на первый товар обратно пропорциональна доли дохода затрачиваемой на этот товар

20. Доля средств, расходуемых потребителем на приобретение каждого блага — постоянная (и положительная) доля совокупных расходов потребителя. Максимизацией функции полезности какого класса можно породить такой тип потребительского поведения?
♦ Квазилинейной;
♦ Леонтьевской (ситуация комплементарности благ);
♦ Функцией полезности Кобба-Дугласа

21. Спрос потребителя на любое благо зависит лишь от относительной цены данного блага и совокупных потребительских расходов. Максимизацией функции полезности какого класса можно породить такой тип потребительского поведения?
♦ Квазилинейной;
♦ Леонтьевской (ситуация комплементарности благ);
♦ Функцией полезности Кобба-Дугласа

22. Спрос потребителя на первые n–1 благ зависит лишь от относительной цены этих благ. Максимизацией функции полезности какого класса можно породить такой тип потребительского поведения?
♦ Квазилинейной;
♦ Квазилинейной и сепарабельной
♦ Функцией полезности Кобба-Дугласа

23. Спрос потребителя на первые n –1 благо не зависит от (совокупных) потребительских расходов. Максимизацией функции полезности какого класса можно породить такой тип потребительского поведения?
♦ Квазилинейной;
♦ Сепарабельной
♦ Квазилинейной и сепарабельной

24. Спрос потребителя на первые n –1 благо зависит лишь от цены данного блага. Максимизацией функции полезности какого класса можно породить такой тип потребительского поведения?
♦ Квазилинейной;
♦ Сепарабельной
♦ Квазилинейной и сепарабельной

25. Структура спроса потребителя постоянна (отношение величины покупок j блага к величине 1 блага, j=1,..., n). Максимизацией функции полезности какого класса можно породить такой тип потребительского поведения?
♦ Леонтьевской (ситуация комплементарности благ);
♦ Линейной (ситуация вполне заменимых благ).
♦ Функцией полезности Кобба-Дугласа

26. Пусть функция полезности потребителя имеет вид $u(\boldsymbol{x}) = (ax_1^{\mathrm{r}} + bx_2^{\mathrm{r}})^{1/\mathrm{r}}$.
Если $\mathrm{r} \to 0$, то
♦ функция полезности имеет вид $u(\boldsymbol{x})=x_1^{\mathrm{a}}\, x_2^{\mathrm{b}}$
♦ функция полезности имеет вид $u(\boldsymbol{x})=x_1^{\mathrm{a}} + x_2^{\mathrm{b}}$
♦ функция полезности имеет вид $u(\boldsymbol{x})=ax_1 + bx_2$

27. Пусть функция полезности потребителя имеет вид $u(\boldsymbol{x}) = (ax_1^{\mathrm{r}} + bx_2^{\mathrm{r}})^{1/\mathrm{r}}$.
Если $\mathrm{r} \to 1$, то
♦ функция полезности имеет вид $u(\boldsymbol{x})=x_1^{\mathrm{a}}\, x_2^{\mathrm{b}}$

♦ функция полезности имеет вид $u(\boldsymbol{x})=x_1^a + x_2^b$

♦ функция полезности имеет вид $u(\boldsymbol{x})=ax_1 + bx_2$

28. Пусть функция полезности потребителя имеет вид $u(\boldsymbol{x}) = (ax_1^r + bx_2^r)^{1/r}$.
Если $r \to -\infty$, то

♦ функция полезности имеет Леонтьевский тип

♦ функция полезности имеет вид функции Кобба-Дугласа

♦ функция полезности линейна

29. Какая из нижеприведенных функций выступая в качестве функции полезности дает всегда граничные решения

♦ $x_1 + x_2$

♦ $x_1^2 + x_2^2$

♦ $x_1 x_2$

30. Пусть функция полезности участника имеет вид $u(\boldsymbol{x})= x_1 + \ln(x_2)$. Цена первого товара 1, а цена второго товара 2. Потребитель будет потреблять оба товара в положительных количествах, начиная с дохода

♦ 1.5

♦ 1

♦ 2

31. Покажите, что для (выпуклых, локально ненасыщаемых) предпочтений непрямая функция имеет мультипликативную форму $a(\boldsymbol{p})R$ в том и только том случае, когда (прямая) функция полезности является положительно однородной первой степени.

32. Покажите, что если функция полезности аддитивно сепарабельна и строго монотонна, то в экономике не будет взаимодополняемых товаров

33. Покажите, что строгой выпуклости предпочтений недостаточно для справедливости предыдущего утверждения (приведите соответствующий пример).

34. Покажите, что если функция полезности является однородной первой степени, то непрямая функция полезности $v(\boldsymbol{p},R)$ имеет вид $v(\boldsymbol{p},R) = a(\boldsymbol{p}) + b(\boldsymbol{p})R$.

35. Покажите, что если функция полезности является квазилинейной, то непрямая функция полезности $v(\boldsymbol{p},R)$ имеет вид $v(\boldsymbol{p},R) = a(\boldsymbol{p}) + b(\boldsymbol{p})R$ для тех значений $\boldsymbol{p}$ и R, при которых оптимальный потребительский набор содержит все блага (в положительных количествах).

36. В экономике с тремя благами потребитель имеет положительный доход $R > 0$ и его функции спроса на первое и второе благо равны

$$x_1 = 100 - 5\frac{p_1}{p_3} + \beta\frac{p_2}{p_3} + \delta\frac{w}{p_3},$$

$$x_2 = \alpha + \beta\frac{p_1}{p_3} + \gamma\frac{p_2}{p_3} + \delta\frac{w}{p_3},$$

где α, β, γ, $\delta \geqslant 0$.

(а) Объясните, как можно рассчитать спрос не третье благо (вычисления делать не надо).

(б) Являются ли функции спроса для x_1 и x_2 однородными требуемой степени?

(в) Какие ограничения на параметры α, β, γ, δ должны выполняться, чтобы данные функции спроса могли быть порождены задачей максимизации полезности.

(г) Используя результаты пункта (в) для фиксированного значения спроса на 3-й товар изобразите кривые безразличия в пространстве (x_1, x_2).

(д) Что можно сказать о свойствах функции полезности этого потребителя? (Используйте результаты пункта (г).)

37. Предположим, что функция полезности потребителя зависит лишь от двух благ потребления C и досуга L, а доход формируется из трудового $w(L_0 - L)$ и (экзогенно заданного) нетрудового дохода m. Здесь w — ставка заработной платы и L_0 — его общий бюджет (фонд) времени. Покажите на примерах, что даже в том случае, когда досуг (и потребление) — нормальное благо, предложение труда (разность между общим бюджетом времени и спросом на досуг) может убывать при росте ставки заработной платы. Объясните невыполнение “закона спроса” в данной ситуации.

38. Покажите, что если предпочтения потребителя гомотетичны, то отношение функций спроса на любые два товара не зависит от уровня дохода.

39. Покажите, что если предпочтения потребителя гомотетичны, то функции спроса удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial x_i(\boldsymbol{p},R)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j(\boldsymbol{p},R)}{\partial p_i}.$$

40. Функция полезности потребителя зависит от потребления некоторого блага x и потребления остальных благ (вектора $\boldsymbol{z}$) и однородна первой степени. Докажите, что при фиксированных ценах на остальные блага (вектор $\boldsymbol{q}$) предпочтения потребителя на парах (x, y), где y — сумма денег затрачиваемая на покупку набора $\boldsymbol{z}$, представимы однородной первой степени “полунепрямой” функцией полезности $U(x,y)$.

41. Во вводных курсах микроэкономики обычно вводят следующее определение благ-заменителей и комплементарных благ (в терминах функций спроса Маршалла):

«Благо 1 называется субститутом блага 2, если $\dfrac{\partial x_2}{\partial p_1} < 0$».

«Благо 1 называется комплементарным для блага 2, если $\dfrac{\partial x_2}{\partial p_1} > 0$».

Покажите, что такое определение ведет к парадоксам. Например, возможна ситуация, когда благо 1 является субститутом блага 2, а обратное неверно.
Покажите также, что, аналогичные определения в терминах функции спроса Хикса (приведите их) свободны от парадоксов такого типа.

42. Покажите, что любой товар Гиффена является малоценным. Справедливо ли обратное?

43. С какими типами благ мы имеем дело в случае следующих функций полезности:
- Кобба-Дугласа, - CES, -Леонтьева,
- линейной, - квазилинейной,
- аддитивной.

44. Могут ли все блага быть малоценнными, если предпочтения локально ненасыщаемы?

45. Пусть полезность потребителя зависит от двух благ, и первое благо является дискретным (доступные уровни его потребления — целые числа а потребитель имеет квазилинейные предпочтения. При каких ценах на благо 1 потребитель предъявляет спрос на него на уровне 1, 2, …?

46. Покажите, что если функция полезности квазилинейна, то непрямая функция полезности — выпуклая функция цен.

1.5. Двойственность в модели потребителя

Выберем в качестве U достижимое значение полезности (т.е. $U = u(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \geqslant 0$) и рассмотрим следующую задачу:

<u>Задача 2</u>

$\boldsymbol{px} \to \min_{\boldsymbol{x}}$

$u(\boldsymbol{x}) \geqslant U,$ (2-1)

$\boldsymbol{x} \geqslant 0.$ (2-2)

Введем два понятия, связанные с этой задачей.

Определение 20. Функцией расходов $e(\boldsymbol{p},U)$ называют значение целевой функции в Задаче 2 в точке оптимума при данных $\boldsymbol{p}$ и U.

Согласно определению, для каждого достижимого уровня полезности функция расходов указывает минимальный уровень расходов (дохода), обеспечивающий такой уровень полезности.

Предположим, что решение Задачи 2 единственно при всех значениях цен рассматриваемых благ. Тогда можно определить функцию спроса Хикса, соответствующую данному значению полезности U.

Определение 21. Функция спроса Хикса $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},U)$ сопоставляет заданному уровню полезности U и ценам $\boldsymbol{p}$ потребительский набор, который обеспечивает наименьший уровень расходов.

Заметим, что из определения функций $e(\boldsymbol{p},U)$ и $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},U)$ следует, что

$$\boldsymbol{ph}(\boldsymbol{p},U) = e(\boldsymbol{p},U).$$

Кроме того, если функция полезности непрерывна, то хиксианский спрос удовлетворяет также равенству

$$u(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},U)) = U,$$

что доказывает следующее утверждение.

Утверждение 17.

Пусть функция полезности $u(.)$ непрерывна.

Тогда если $\tilde{\boldsymbol{x}}$ является решением Задачи 2 при некоторых ценах $\boldsymbol{p}\gg 0$ и $U \geqslant u(\mathbf{0})$, то $u(\tilde{\boldsymbol{x}}) = U$.

Доказательство:

Предположим противное. Пусть решение Задачи 2 удовлетворяет условию $u(\tilde{\boldsymbol{x}}) > U \geqslant u(\mathbf{0})$.

Из соотношения $u(\tilde{\boldsymbol{x}}) > u(\mathbf{0})$ следует, что $\tilde{\boldsymbol{x}}\neq\mathbf{0}$, поэтому, поскольку $\boldsymbol{p} \gg \mathbf{0}$, то $\boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}} > 0$.

Рассмотрим два случая: (а) $U = u(\mathbf{0})$ и (б) $U > u(\mathbf{0})$.

В ситуации (а) нулевой вектор допустим и стоит меньше, чем $\hat{\boldsymbol{x}}$, что противоречит оптимальности $\tilde{\boldsymbol{x}}$.

Рассмотрим теперь случай (б). Так как $u(.)$ непрерывна, то существует $\alpha<1$, такое что $\alpha\tilde{\boldsymbol{x}}$ допустим ($u(\alpha\tilde{\boldsymbol{x}}) \geqslant U$). Но этот набор $\alpha\tilde{\boldsymbol{x}}$ стоит дешевле, чем $\tilde{\boldsymbol{x}}$, т. е. $\boldsymbol{p}\alpha\tilde{\boldsymbol{x}} = \alpha\boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}} < \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}}$. А это противоречит оптимальности $\tilde{\boldsymbol{x}}$, что и доказывает утверждение.

■

Утверждение 18 (свойства функции расходов) :

1) Функция однородна первой степени по ценам:

$$e(\lambda p, U) = \lambda\, e(\boldsymbol{p}, U);$$

2) Функция $e(\boldsymbol{p}, U)$ — вогнутая функция цен $\boldsymbol{p}$.

3) Функция $e(\boldsymbol{p}, U)$ непрерывна.

4) Функция $e(\boldsymbol{p}, U)$ возрастает по U.

5) Функция $e(\boldsymbol{p}, U)$ не убывает по ценам.

Доказательство:

(1) Первый пункт утверждения следует из того, что решения Задачи 2 (потребительский набор минимальной стоимости) при векторе цен $\boldsymbol{p}$ и векторе цен $\lambda\boldsymbol{p}$ совпадают.

(2) Мы должны показать, что для двух произвольных векторов $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ выполняется $e(\alpha\boldsymbol{p}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{p}_2, U) \geqslant \alpha\, e(\boldsymbol{p}_1, U) + (1-\alpha)\, e(\boldsymbol{p}_2, U)$.

Пусть $\tilde{\boldsymbol{x}}$ — оптимальное решение Задачи 2 при ценах $\alpha\boldsymbol{p}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{p}_2$, тогда $(\alpha\boldsymbol{p}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{p}_2)\,\tilde{\boldsymbol{x}} = e(\alpha\boldsymbol{p}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{p}_2, U)$. Множество $\{\boldsymbol{x} \mid u(\boldsymbol{x}) \geqslant U\}$ не зависит от $\boldsymbol{p}$, поэтому, поскольку $u(\tilde{\boldsymbol{x}}) \geqslant U$ при ценах $\alpha\boldsymbol{p}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{p}_2$, то $u(\tilde{\boldsymbol{x}}) \geqslant U$ и при ценах $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$. Из определения функции расходов и допустимости $\tilde{\boldsymbol{x}}$ имеем

$$e(\boldsymbol{p}_1, U) \leqslant \boldsymbol{p}_1\tilde{\boldsymbol{x}} \quad \text{и} \quad e(\boldsymbol{p}_2, U) \leqslant \boldsymbol{p}_2\tilde{\boldsymbol{x}}.$$

Отсюда

$$\alpha e(\boldsymbol{p}_1, U) + (1-\alpha)\, e(\boldsymbol{p}_2, U) \leqslant (\alpha \mathrm{p}_1 + (1-\alpha)\mathrm{p}_2)\tilde{\boldsymbol{x}} = e(\alpha\boldsymbol{p}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{p}_2, U).$$

(3) Доказательство непрерывности оставляем читателю в качестве упражнения. Заметим только, что непрерывность следует из того, что (а) функция расходов вогнута как функция цен и (б) любая вогнутая функция непрерывна во внутренности своей области определения.

(4) Доказательство этого пункта подобно доказательству возрастания непрямой функции полезности по доходу и оставляется в качестве самостоятельного упражнения.

(5) Пусть $\boldsymbol{p}' \geqslant \boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{p}' \neq \boldsymbol{p}$. Тогда $\boldsymbol{p}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}', U) \geqslant \boldsymbol{p}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, U) = e(\boldsymbol{p}, U)$. Но $e(\boldsymbol{p}', U) = \boldsymbol{p}'\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}', U) \geqslant \boldsymbol{p}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}', U)$. Заметим, что если $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}', U) \gg 0$, то $e(\boldsymbol{p}', U) > e(\boldsymbol{p}, U)$.

■

Решения Задачи 1 и Задачи 2 тесно связаны между собой, что доказывает нижеследующая "теорема двойственности". Некоторые авторы называют этот результат "теоремой взаимности". Этой традиции мы и будем следовать в дальнейшем.

Утверждение 19

I. Пусть функция полезности локально ненасыщаема. Тогда если $\boldsymbol{x}^*$ является решением Задачи 1, то $\boldsymbol{x}^*$ является решением Задачи 2 при $U = u(\boldsymbol{x}^*)$.

II. Пусть функция полезности непрерывна. Тогда если $\boldsymbol{x}^*$ является решением Задачи 2 с $\boldsymbol{p} \gg \boldsymbol{0}$, то $\boldsymbol{x}^*$ является решением Задачи 1 при $R = \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}^*$.

Доказательство:

I. Предположим противное: $\boldsymbol{x}^*$ не является решением Задачи 2, т.е. существует допустимое решение Задачи 2 — потребительский набор $\boldsymbol{x}'$ такой, что $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}^* > \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}'$. Поскольку $\boldsymbol{x}'$ допустим в Задаче 2, то $u(\boldsymbol{x}') \geqslant U = u(\boldsymbol{x}^*)$. С другой стороны, из локальной ненасыщаемости предпочтений следует, что существует $\boldsymbol{x}''$, такой что $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}^* \geqslant \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}''$ и $u(\boldsymbol{x}'') > u(\boldsymbol{x}') \geqslant u(\boldsymbol{x}^*)$. А это противоречит оптимальности $\boldsymbol{x}^*$ в Задаче 1.

II. Предположим, что $\boldsymbol{x}^*$ не является решением Задачи 1. Тогда существует потребительский набор $\boldsymbol{x}'$, который является допустимым решением Задачи 1, такой что $u(\boldsymbol{x}') > u(\boldsymbol{x}^*)$. Набор $\boldsymbol{x}'$ должен удовлетворять бюджетному ограничению, т.е.

$\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}' \leqslant R = \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}^*$. Такой набор $\boldsymbol{x}'$ может найтись только при $\boldsymbol{x}^*\neq\boldsymbol{0}$, поскольку в противном случае $\boldsymbol{x}^*$ — единственное допустимое решение Задачи 1. Тогда, поскольку $\boldsymbol{p}\gg 0$, то $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}^* > 0$. В силу непрерывности отношения предпочтения найдется α такое, что $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}^* > \alpha\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}'$ и $u(\alpha\boldsymbol{x}') \geqslant u(\boldsymbol{x}^*)$. Это противоречит оптимальности $\boldsymbol{x}^*$ в Задаче 2.

■

Из доказанной теоремы следует, что в случае, когда предпочтения локально ненасыщаемы и непрерывны, справедливы следующие четыре тождества, которые по сути дела являются соотношениями двойственности для Задач 1 и 2:

- ♣ $\nu(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p}, U)) \equiv U$;
- ♣ $e(\boldsymbol{p}, \nu(\boldsymbol{p}, R)) \equiv R$;
- ♣ $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) \equiv \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, \nu(\boldsymbol{p}, R))$;
- ♣ $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, U) \equiv \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \mathrm{e}(\boldsymbol{p}, U))$.

Последнее из тождеств, является, по-видимому, самым важным в эмпирических исследованиях потребительского поведения, поскольку связывает наблюдаемый маршаллианский спрос с ненаблюдаемым хиксианским.

В ситуации, когда l=2, маршаллианский спрос — наилучший набор (точка) на данной бюджетной прямой. Хиксианский спрос — самый дешевый набор благ на данной кривой безразличия (см. помещенную ниже графическую иллюстрацию).

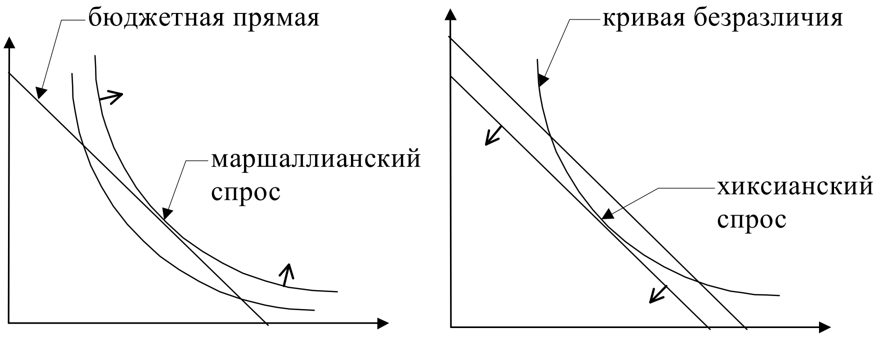


Рисунок 3

Когда хиксианский и маршаллианский спрос не совпадают? В качестве примера можно привести предпочтения с “толстой” кривой безразличия (такие кривые безразличия появятся, например, если взять в качестве функции полезности целую часть какой-нибудь “нормальной” функции полезности). Хиксианский спрос всегда будет лежать (случай двух благ) на левой нижней границе “толстой” кривой безразличия. На рисунке эта граница изображена темной линией. Маршаллианский же спрос может лежать внутри “толстой” кривой безразличия.

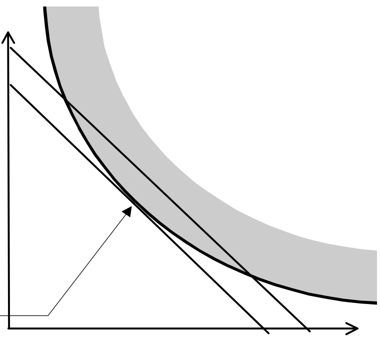


Рисунок 4. «Толстая» кривая безразличия

Причина несовпадения заключается в том, что “толстая” кривая безразличия означает отсутствие локальной ненасыщаемости. Таким образом, для того, чтобы гарантировать выполнение равенства $h_i(\boldsymbol{p},U) = x_i(\boldsymbol{p},\ e(\boldsymbol{p},U))$, нужно требовать наличие локальной ненасыщаемости.

Предположим дополнительно, что функции $e(\boldsymbol{p},U)$, $\nu(\boldsymbol{p},R)$, $h_i(\boldsymbol{p},U)$, $x_i(\boldsymbol{p},R)$ — дифференцируемые функции (т.е соответствующая функция полезности $u(.)$, представляющая данные предпочтения, дважды непрерывно дифференцируема). Тогда выполняются три важных свойства: лемма Шепарда, тождество Роя и уравнение Слуцкого.

Связь между функциями расходов и (хиксианского) спроса описывается леммой Шепарда.

Утверждение 20 (<u>Лемма Шепарда для теории потребления</u>).

$$\frac{\partial \mathrm{e}(p,U)}{\partial p_i} = h_i(\boldsymbol{p},U)$$

<u>Доказательство</u>:

Учитывая значение этого результата для теории потребления, укажем несколько его обоснований

1. По определению функции расходов $e(\boldsymbol{p},U) = \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},U)\ \forall \boldsymbol{p},U$. Продифференцировав это тождество по p_i, получим соотношение:

$$\frac{\partial \mathrm{e}(\boldsymbol{p},U)}{\partial p_i} = h_i(\boldsymbol{p},U) + \sum_j p_j \frac{\partial h_j(\boldsymbol{p},U)}{\partial p_i}.$$

Остается показать, что второе слагаемое равно нулю.

Последнее утверждение стоит проинтерпретировать. Хотя при изменении цен рассматриваемых благ потребитель меняет свое поведение, предпочитая, вообще говоря, другой потребительский набор, при расчете изменения расходов на приобретение нового набора в первом приближении можно не учитывать этого изменение спроса потребителя. Другими словами, новые расходы в первом приближении рассчитываются так, как если бы оптимальный выбор остался неизменным, т.е. эти новые расходы равны стоимости старого набора в новых ценах. Изменение спроса проявляется лишь во втором приближении.

Докажем это утверждение.

Так как $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},U)$ — решение Задачи 2, то по теореме Куна-Таккера существует множитель Лагранжа λ ограничения (2-1) задачи такой, что

$$p_j = \lambda \frac{\partial u}{\partial x_j} \ \ \forall j.$$

(Напомним, что, как обычно, мы предполагаем, что решение внутреннее.)

Отсюда $\sum_j p_j \dfrac{\partial h_j(\boldsymbol{p},U)}{\partial p_i} = \lambda \sum_j \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \dfrac{\partial\, h_j(\boldsymbol{p},U)}{\partial p_i}$.

В соответствие с определением функции $\boldsymbol{h}(.)$ выполняется тождество $u\,(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},U)) \equiv U$. Продифференцировав его по p_i, получим требуемое соотношение

$$\sum_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial\, h_j(\boldsymbol{p},U)}{\partial\, p_i} = 0.$$

Другое доказательство этого факта состоит в построении касательной для графика функции расходов.

Обозначим $\boldsymbol{p}_{-i} = (\,p_1,\dots,p_{i-1},\,p_{i+1},\dots,p_l)$. При этом $(p_i,\,\boldsymbol{p}_{-i}) = \boldsymbol{p}$.

Пусть $\boldsymbol{p}^*$ — некоторая точка. Зафиксируем все цены, кроме цены i-го блага $\boldsymbol{p}_{-i} = \boldsymbol{p}^*_{-i}$. Покажем, что прямая $p_i h_i(\boldsymbol{p}^*,U) + \sum_{j\neq i} p_j^*\ h_j(\boldsymbol{p}^*,U)$ касается графика функции $e\,(p_i,\,\boldsymbol{p}^*_{-i},U)$ в точке p^*_i. Действительно, набор $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}^*,U)$ при ценах $\boldsymbol{p}^*$ требует минимальных расходов на приобретение из наборов, обеспечивающих полезность U. При любых других ценах он допустим, но, вообще говоря, не минимизирует расходы. При ценах $(p_i,\boldsymbol{p}^*_{-i})$ минимум расходов достигается на потребительской корзине $\boldsymbol{h}(p_i,\,\boldsymbol{p}^*_{-i},U)$. Другими словами, справедливо соотношение, которое и устанавливает требуемый результат о касании:

$$e\,(p_i,\boldsymbol{p}^*_{-i},U) = p_i h_i(p_i,\boldsymbol{p}^*_{-i},U) + \sum_{j\neq i} p_j^*\ h_j(p_i,\boldsymbol{p}^*_{-i},U) \leqslant p_i h_i(\boldsymbol{p}^*,U) + \sum_{j\neq i} p_j^*\ h_j(\boldsymbol{p}^*,U).$$

Сказанное иллюстрирует нижеприведенный график.

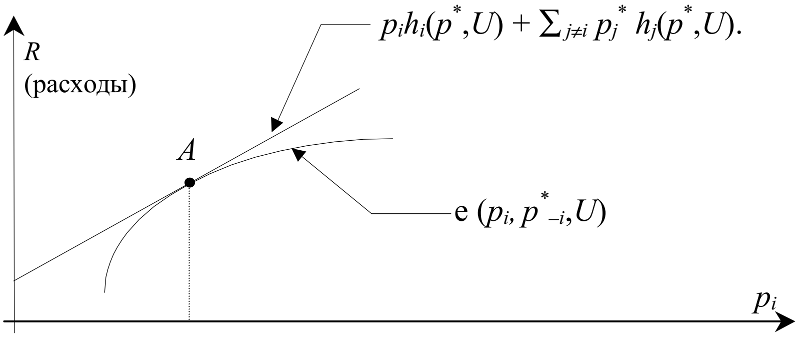


Рисунок 5

Согласно неравенству, кривая $R = e\,(p_i,\boldsymbol{p}^*_{-i},U)$ лежит под прямой

$$R = p_i h_i(\boldsymbol{p}^*,U) + \sum_{j\neq i} p_j^*\ h_j(\boldsymbol{p}^*,U)$$

и имеет с ней общую точку $(p_i^*,\,e\,(\boldsymbol{p}^*,U)$ (А на рисунке). Значит, эта прямая является касательной к кривой $R = e\,(p_i,\boldsymbol{p}^*_{-i},U)$. Наклон прямой равен $h_i(\boldsymbol{p}^*,U)$.

Таким образом, производная функции $e\,(p_i,\boldsymbol{p}^*_{-i},U)$ равна $h_i(\boldsymbol{p}^*,U)$:

$$\frac{\partial e}{\partial p_i}(p_i,\boldsymbol{p}^*_{-i},U) = \frac{\partial e}{\partial \boldsymbol{p}_i}(p^*_j,U) = h_i(\,p^*_j,U).$$

■

Из леммы Шепарда следует, что по функции расходов всегда можно построить функцию (хиксианского) спроса.

Утверждение 21 (<u>Тождество Роя</u>)

$$-\frac{\partial \nu(p,R)}{\partial p_i} / \frac{\partial \nu(p,R)}{\partial R} = x_i(\boldsymbol{p},R).$$

<u>Доказательство</u>:

Для доказательства этого тождества воспользуемся одним из перечисленных выше тождеств:

для любого $\boldsymbol{p} \gg \mathbf{0}$ выполняется соотношение: $\nu(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p},U)) = U$

Продифференцируем это тождество по p_i:

$$\frac{\partial \nu}{\partial p_i}(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p},U)) + \frac{\partial \nu}{\partial R}(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p},U)) \frac{\partial e}{\partial \boldsymbol{p}_i}(\boldsymbol{p},U) = 0.$$

По лемме Шепарда $\frac{\partial \mathrm{e}}{\partial p_i}(\boldsymbol{p},U) = h_i(\boldsymbol{p},U)$, следовательно

$$\frac{\partial \nu}{\partial p_i}(\boldsymbol{p},e(\boldsymbol{p}, U)) + \frac{\partial \nu}{\partial R}(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p},U))h_i(\boldsymbol{p},U) = 0.$$

Возьмем $U = \nu(\boldsymbol{p},R)$.

Воспользуемся тождествами $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\nu(\boldsymbol{p},R)) \equiv \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)$ и $\mathrm{e}(\boldsymbol{p}, \nu(\boldsymbol{p},R)) \equiv R$. Из них следует, что верно соотношение

$$-\frac{\partial \nu}{\partial p_i}(p,R) / \frac{\partial \nu}{\partial R}(p,R) = x_i(\boldsymbol{p},R).$$

■

Утверждение 22 (<u>Уравнение Слуцкого</u>)

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i}{\partial p_j} - \frac{\partial x_i}{\partial R} x_j.$$

$\frac{\partial h_i}{\partial p_j}$ — эффект замены, $\frac{\partial x_i}{\partial R} x_j$ — эффект дохода.

<u>Доказательство</u>:

Для доказательства воспользуемся следующим тождеством:

$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \mathrm{e}(\boldsymbol{p},U)) \equiv \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},U)$.

Продифференцируем это тождество по p_j:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \mathrm{p}_j}(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p},U)) + \frac{\partial x_i}{\partial R}(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p}_i,U)) \frac{\partial e}{\partial p_j}(\boldsymbol{p},U) = \frac{\partial h_i}{\partial \mathrm{p}_j}(\boldsymbol{p},U).$$

Воспользуемся леммой Шепарда $\frac{\partial \mathrm{e}(p,U)}{\partial p_j} = h_j(\boldsymbol{p},U)$.

Если $U = \nu(\boldsymbol{p},R)$, то $e(\boldsymbol{p},U) = R$, $h_j(\boldsymbol{p},U) = x_j(\boldsymbol{p}, R)$.

Следовательно,

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j}(\boldsymbol{p}, R) + \frac{\partial x_i}{\partial R}(\boldsymbol{p}, R)\, x_j(\boldsymbol{p}, R) = \frac{\partial h_i}{\partial p_j}(\boldsymbol{p}, \nu(\boldsymbol{p},R)).$$

■

Устанавливая эти соотношения, мы предполагали, что функции $v(\boldsymbol{p},R)$ и $e(\boldsymbol{p},U)$ непрерывно дифференцируемы. Теперь усилим это требование, предположив, что функция расходов дважды непрерывно дифференцируема. Тогда в силу теоремы Юнга (Young) ее смешаные вторые производные совпадают, т.е.

$$\frac{\partial^2 e}{\partial p_j \partial p_i}(\boldsymbol{p},U) = \frac{\partial^2 e}{\partial p_i \partial p_j}(\boldsymbol{p},U).$$

Дифференцируя тождество Шепарда, получаем

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_j}(\boldsymbol{p},U) = \frac{\partial h_j}{\partial p_i}(\boldsymbol{p},U).$$

Используя этот результат и уравнение Слуцкого, имеем

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j}(\boldsymbol{p},R) + \frac{\partial x_i}{\partial \mathrm{R}}(\boldsymbol{p},R)\, x_j(\boldsymbol{p},R) = \frac{\partial x_j}{\partial p_i}(\boldsymbol{p},R) + \frac{\partial x_j}{\partial \mathrm{R}}(\boldsymbol{p},R)\, x_i(\boldsymbol{p},R).$$

Таким образом, мы показали симметричность матрицы Якоби функции расходов, т.е. матрицы, коэффициент a_{ij} которой рассчитывается по следующей формуле:

$$\frac{\partial^2 e}{\partial p_j \partial p_i} = \frac{\partial h_i}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i}{\partial R}\, x_j$$

Эту матрицу называют также матрицей коэффициентов замены. Таким образом, матрица коэффициентов замены функции расходов потребителя, выборы которого описываются моделью рационального поведения, всегда симметрична.

Кроме того, поскольку функция расходов $e(\boldsymbol{p},U)$ — вогнутая функция цен, то матрица коэффициентов замены является отрицательно полуопределенной.

Это важные характеристики спроса, порожденного моделью рационального поведения. Они являются не только необходимыми (как мы только что установили), но и достаточными (как покажем далее) условиями того, что некоторая функция цен и уровней полезности является функцией расходов рационального потребителя. Согласно уравнению Слуцкого эти характеристики могут быть выражены в терминах первых частных производных маршаллианского спроса, которые, как предполагается, являются непосредственно наблюдаемыми, что дает возможность проверять согласованность наблюдаемого потребительского поведения с моделью рационального поведения и восстанавливать предпочтения потребителя на основе его рыночного поведения (выборов).

<u>Тесты и задачи для самостоятельного решения</u>

1. Если спрос на товар обладает отрицательным эффектом дохода,
то этот товар является
- ♦ нормальным
- ♦ малоценным
- ♦ товаром Гиффена

2. Какое из нижеприведенных утверждений верно:

♦ товар является малоценным тогда и только тогда, когда он — товар Гиффена
♦ товар Гиффена является малоценным товаром
♦ малоценный товар является товаром Гиффена

3. Какое из нижеприведенных утверждений неверно
♦в экономике с двумя товарами первый товар субститут второго, но второй не субститут первого
♦ существует предпочтения потребителя, при которых он при любых ценах и доходах потребляет только первый товар
♦ в экономике с двумя товарами оба товара являются товарами Гиффена

4. Эффект замены отсутствует в случае, если
♦ функция полезности квазилинейна
♦ функция полезности вогнута
♦ блага комплементарные

5. Эффект дохода отсутствует в случае, если функция полезности
♦ квазилинейна
♦ вогнута
♦ линейна

6. В экономике 2 товара. Известно, что в матрице замены $a_{11} = -2$ и $a_{22} = -1$. В этом случае элемент a_{21} равен
♦ –3
♦ –1.5
♦ не достаточно данных для ответа

7. Какие из нижеприведенных формул верны?
♦ $\boldsymbol{p}D_R\,\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},R) = 1$
♦ $\boldsymbol{p}D_R\,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R) = 1$
♦ $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, u)\,D_R\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R) = 1$

8. Какое из нижеприведенных определений взаимозаменяемых (взаимодополняемых) благ не ведет к парадоксам следующего типа: благо 1 является субститутом блага 2, однако обратное неверно?
♦ благо i называется субститутом блага j если $\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}p_j} > 0$
♦ благо i называется субститутом блага j если $\dfrac{\mathrm{d}h_i}{\mathrm{d}p_j} > 0$
♦ оба вышеприведенных определения ведут к парадоксам указанного типа

9. Какими из нижеперечисленных свойств обладает функция расходов?
1) однородна нулевой степени по ценам
2) однородна нулевой степени по ценам и доходам

3) неубывает по ценам
♦ 1, 2
♦ 2
♦ 3

10. Какими из нижеперечисленных свойств обладает функция расходов?
♦ выпукла по ценам
♦ строго убывает по уровню полезности и не возрастает по ценам
♦ однородна первой степени по доходу

11. Какими из нижеперечисленных свойств обладает хиксианский спрос?
♦ однородна нулевой степени по доходу
♦ однородна нулевой степени по ценам
♦ возрастает по ценам и не убывает по доходу

12. Матрица Якоби хиксианского спроса
♦ положительно полуопределена
♦ симметрична
♦ вырождена

13. Лемма Шепарда устанавливает связь между...
♦ хиксианским спросом и функцией затрат;
♦ хиксианским и маршалианским спросом;
♦ маршалианским спросом и непрямой функцией полезности.

14. Тождество Роя устанавливает связь между
♦ хиксианским спросом и функцией затрат;
♦ маршаллианским спросом и непрямой функцией полезности;
♦ хиксианским и маршаллианским спросом.

15. Уравнение Слуцкого устанавливает связь между ...
♦ хиксианским спросом и функцией затрат;
♦ маршаллианским спросом и непрямой функцией полезности;
♦ хиксианским и маршаллианским спросом.

16. Какое из нижеприведенных выражений верно
♦ $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},u) = -\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p},R) \,/\, \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}R}(\boldsymbol{p},R)$;
♦ $e(\boldsymbol{p},u) = -\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p},u)$;
♦ $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},u) = -\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p},u)$.

17. Какое из нижеприведенных выражений верно?

♦ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$

♦ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}R}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$

♦ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}R}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$

18. Пусть функция полезности непрерывна, локально ненасыщаема, строго вогнута. Функция хиксианского спроса $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},u)$ непрерывно дифференцируема. Какие из нижеприведенных свойств справедливы при этих предположениях?

1) $D_p\boldsymbol{h} = D_p^2\, e(\boldsymbol{p},u)$

2) $D_p\boldsymbol{h}$ — отрицательно полуопределена

3) $D_p\boldsymbol{h}$ — симметрична

♦ 1

♦ 1,2

♦ 1,2,3

19. Если функция полезности имеет вид Гормана, то функция затрат имеет вид

♦ $e(\boldsymbol{p},u) = c(\boldsymbol{p}) + u$

♦ $e(\boldsymbol{p},u) = \mathrm{c}(\boldsymbol{p})\, u + d(\boldsymbol{p})$

♦ $e(\boldsymbol{p},u) = c(\boldsymbol{p}) + d(u)$

20. Если функция полезности однородна первой степени, то ...

♦ функция хиксианского спроса и функция затрат однородны первой степени по уровню полезности

♦ функция хиксианского спроса однородна нулевой степени по уровню полезности

♦ маршалианский спрос однороден нулевой степени по доходу

21. Целевой функционал взаимной задачи — это...

♦ полезность индивидуума

♦ расходы индивидуума

♦ потребительский излишек

22. Теорема взаимности устанавливает взаимосвязь между...

♦ решениями задач максимизации полезности и минимизации затрат

♦ хиксианским спросом и непрямой функцией полезности

♦ маршалианским спросом и непрямой функцией полезности

23. Для выполнения теоремы взаимности функция полезности должна быть...

♦ квазивогнута

♦ квазивогнута и локально ненасыщаема

♦ локально ненасыщаема

24. Какое из нижеприведенных выражений неверно

♦ $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},u) = \nu(\boldsymbol{p},e(\boldsymbol{p},u))$
♦ $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\nu(\boldsymbol{p},R))$
♦ $e(\boldsymbol{p},\nu(\boldsymbol{p},R)) = R$

25. Какое из нижеприведенных выражений верно
♦ $\nu(\boldsymbol{p},R) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R))$
♦ $\nu(\boldsymbol{p},e(\boldsymbol{p},u)) = u$
♦ $e(\boldsymbol{p},u) = \nu(\boldsymbol{p},\boldsymbol{h}(e,\boldsymbol{p}))$

26. Пусть функция полезности индивидуума имеет вид

$$u(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} x_1x_2, & \text{если } x_1x_2 \leqslant 1 \\ 1, & \text{если } 1 \leqslant x_1x_2 \leqslant 2 \\ x_1x_2 - 1, & \text{если } x_1x_2 \geqslant 2 \end{cases}$$

Найдите маршалианский и хиксианский спрос. Как при ценах (1, 1) будут выглядеть
♦ кривые Энгеля,
♦ кривые хиксианского спроса в зависимости от полезности?

27. Покажите, что при росте цен рассматриваемых благ на величину $\Delta\boldsymbol{p}$ прирост потребления хиксианского спроса $\Delta\boldsymbol{h}$ удовлетворяет соотношению

$$\Delta\boldsymbol{p}\ \Delta\boldsymbol{h} \leqslant 0.$$

28. Предположим, что строго выпуклые строго монотонные предпочтения представимы сепарабельной функцией полезности, причем предельная полезность любого продукта как угодно мала при достаточно больших объемах его потребления. Покажите, что
♦ вальрасовский и хиксианский спрос данного потребителя любой продукт не ограничен (т.е. при достаточно низкой цене на продукт спрос на него оказывается выше любой наперед заданной величины;
♦ система функций хиксианского спроса удовлетворяет условию валовой заменимости.

29. Какова функция затрат и какой тип предпочтений имеет потребитель, если его непрямая функция полезности имеет вид

$$v(\boldsymbol{p}, R) = A(\boldsymbol{p})\, R\ .$$

30. Покажите, что функция $v(p_1, p_2, R) = \dfrac{R}{p_1} + \dfrac{R}{p_2}$ удовлетворяет всем свойствам непрямой функции полезности и вычислите на ее основе функцию затрат и функции спроса (маршалианского и хиксианского).

31. Найдите непрямые функции полезности и функции затрат для пяти типов предпочтений, задаваемых следующими функциями полезности:

а. Функцией полезности Кобба-Дугласа

$$u(\boldsymbol{x}) = \prod \boldsymbol{x}_i^{\alpha_i},\ \alpha_i > 0.$$

б. Вогнутой аддитивной функцией полезности

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{x}_i^{\rho}$$

в. Функцией Леонтьева (блага комплементарны)

$$u(\boldsymbol{x}) = \min\{x_i / a_i\}$$

г. Линейной функцией (блага вполне заменимы)

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

д. Квазилинейной функцией

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n-1} s_i(x_i) + x_n.$$

32. Покажите, что для предпочтений предыдущего упражнения непрямая функция полезности и функция расходов взаимно обратны.

33. Вычислите функцию спроса Маршала и Хикса для функций полезности из упражнения 31 и покажите, что выполняются следующие соотношения

- ♣ $\nu(\boldsymbol{p}, \mathrm{e}(\boldsymbol{p},U)) \equiv U$;
- ♣ $\mathrm{e}(\boldsymbol{p}, \nu(\boldsymbol{p},R)) \equiv R$;
- ♣ $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R) \equiv \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},\nu(\boldsymbol{p},R))$;
- ♣ $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},U) \equiv \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, \mathrm{e}(\boldsymbol{p},U))$.

где $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)$ – функция спроса Маршала, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},U)$ – функция спроса Хикса на благо, $\mathrm{e}(\boldsymbol{p},U)$ – функция затрат, $\nu(\boldsymbol{p},R)$ – непрямая функция полезности.

34. Проверьте путем прямого вычисления, справедливы ли для функций упражнения 31 тождество Роя и лемма Шепарда, связывающие функцию спроса Хикса и функцию затрат, а также соотношение связывающее непрямую функцию полезности и множитель Лагранжа для задачи потребителя.

35. Используя теорему об огибающей (см. Математическое приложение) докажите, что

$$h_i(\boldsymbol{p}, u) = \frac{\partial e(\boldsymbol{p}, u)}{\partial p_i}.$$

36. Используя теорему об огибающей докажите, что $\dfrac{\partial v(\boldsymbol{p},R)}{\partial R}$ — значение множителя Лагранжа задачи потребителя.

37. Пусть A — матрица коэффициентов замены с элементами

$$a_{ij} = \frac{\partial x_i(\boldsymbol{p}, R)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(\boldsymbol{p}, R)}{\partial R} x_j(\boldsymbol{p}, R).$$

Докажите, что $\boldsymbol{p}A = 0$.

38. Пусть выполнен закон Вальраса и функция спроса однородна нулевой степени. Пусть, кроме того, в экономике обращается только два товара. Докажите симмет-

ричность матрицы Слуцкого, не делая предположения о максимизации полезности потребителем.

39. Покажите, что если блага комплементарны, то эффект замены отсутствует, а если предпочтения квазилинейны (для спроса на благо, уровень полезности которого нелинейно зависит от потребления этого блага) то отсутствует эффект дохода.

40. Вычислите коэффициенты замены для следующих функций полезности:
- Кобба-Дугласа, - CES, -Леонтьева,
- линейной, - квазилинейной,
- аддитивной.

41. Матрица замены при ценах $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 6$ имеет вид
$$\begin{bmatrix} -10 & ? & ? \\ ? & -4 & ? \\ 3 & ? & ? \end{bmatrix}.$$
Найдите пропущенные элементы. Может ли эта матрица быть матрицей замены рационального потребителя?

1.6. Интегрируемость функций спроса: восстановление предпочтений

На основе модели рационального поведения, ключевым элементом которой являются предпочтения потребителя, можно построить функции спроса. Однако сами по себе предпочтения ненаблюдаемы, и чтобы иметь возможность прогнозировать будущий спрос при изменениях цен и дохода, нам необходимо решить обратную задачу: восстановить предпочтения по наблюдаемому спросу. Один из подходов к ее решению — анализ так называемой проблемы интергрируемости (в соответствии с методом ее решения).

Рассмотрим его подробнее.

Предположим, что нам известна система функций спроса $x_i(\boldsymbol{p},R)$. Для восстановления непрямой функции полезности можно прямо воспользоваться тождеством Роя
$$x_i(\boldsymbol{p},R) = -\frac{\partial v(p,R)}{\partial p_i} / \frac{\partial v(p,R)}{\partial R},$$
рассматривая это тождество как систему дифференциальных уравнений. Если бы мы смогли решить данную систему дифференциальных уравнений, то получили бы непрямую функцию полезности. Знание непрямой функции полезности и системы функций спроса позволяет нам сопоставить каждому потребительскому набору, который может быть выбран как наилучший при некоторых ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе R, значение полезности по следующему правилу:
$$u(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)) = v(\boldsymbol{p},R).$$

Однако данное правило задает полезность не всех наборов. Так функции полезности $u(x_1, x_2) = \min(2x_1 - x_2, 2x_2 - x_1)$ соответствует функция спроса, для которой $x_1(\boldsymbol{p},R) = x_2(\boldsymbol{p},R)$. Это не позволяет задать полезность для наборов (x_1, x_2), таких что $x_1 \neq x_2$.

Восстановить функцию полезности на множестве потребительских наборов, которые являются оптимальными выборами потребителя при некотрых ценах и доходах, по построенной непрямой функции полезности можно также на основе решения следующей задачи:

$$v(\boldsymbol{p}, R) \to \inf_{\boldsymbol{p}\in \mathbb{R}^l_{++}}$$
$$\boldsymbol{px} \leqslant R. \qquad (\#)$$

При этом в качестве полезности набора $\boldsymbol{x}$ выбираем значение этой задачи —

$$u^*(\boldsymbol{x}) = \inf \{v(\boldsymbol{p}, R) \mid \boldsymbol{p}\in \mathbb{R}^l_{++}, \boldsymbol{px} \leqslant R\}.$$

В качестве дохода можно взять любое положительное число, например, $R = 1$. Покажем, что такая процедура корректна, т.е. на ее основе мы получаем (правда, не для всех точек $\boldsymbol{x}$) прямую функцию полезности, соответствующую данной $v(\boldsymbol{p},R)$.

Утверждение 23. Пусть $u(.)$ — функция полезности, а $v(.,.)$ — соответствующая ей непрямая функция полезности. Пусть в задаче (#) вектор $\boldsymbol{x}$ — оптимальный потребительский набор при ценах $\boldsymbol{p}'$ и доходе R, т.е.

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', R).$$

Тогда вектор $\boldsymbol{p}'$ является решением задачи (#), и $v(\boldsymbol{p}',R) = u(\boldsymbol{x})$.

<u>Доказательство</u>:

Пусть $\boldsymbol{p}$ — произвольный вектор, являющийся допустимым в задаче (#) при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', R)$, т.е. $\boldsymbol{px}(\boldsymbol{p}', R) \leqslant R$. Это неравенство, с другой стороны, означает, что $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', R)$ допустим в задаче потребителя при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе R. Этот набор не может иметь большую полезность, чем набор $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$, являющийся оптимальным в задаче потребителя при ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе R, т.е.

$$u(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', R)) \leqslant u(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)),$$

или

$$v(\boldsymbol{p}',R) \leqslant v(\boldsymbol{p},R).$$

Отсюда следует, что $\boldsymbol{p}'$ оптимален в задаче (#) при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', R)$. Таким образом мы получили, что $v(\boldsymbol{p}',R) = u(\boldsymbol{x})$.

■

Заметим, что в принципе данная процедура позволяет построить «фунцию полезности» $u^*(.)$ на множестве всех наборов благ. Однако она может не везде совпадать с исходной функцией полезности. Так, если $\boldsymbol{x}$ — вектор, для которого задача (#) имеет решение, но который не реализуется как спрос участника ни при каких ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе R (при которых $\boldsymbol{x}$ является допустимым в задаче потребителя), то $u(\boldsymbol{x}) < u(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) = v(\boldsymbol{p},R)$ для каждого $\boldsymbol{p}$ такого, что $\boldsymbol{px} \leqslant R$. В том числе неравенство $u(\boldsymbol{x}) < v(\boldsymbol{p},R)$ верно и для вектора $\boldsymbol{p}$, являющегося решением задачи (#), т.е. $u(\boldsymbol{x}) < u^*(\boldsymbol{x})$. Таким образом, описанная процедура не всегда позволяет получить исходные значения полезности в точках, которые не реализуется как спрос участника ни при каких ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе R.

Хотя мы не всегда можем восстановить функцию полезности правильно, однако полученная функция полезности порождает тот же спрос, что и исходная.

Утверждение 24. Пусть $u(.)$ — функция полезности, а $v(.,.)$ — соответствующая ей непрямая функция полезности и пусть $u^*(.)$ — построена на основе задачи (#) указанным выше способом. Тогда набор $\tilde{\boldsymbol{x}}$, являющийся решением задачи потребителя с функцией полезности $u(.)$ при ценах $\boldsymbol{p} \gg \mathbf{0}$ и доходе $R > 0$, является решением задачи потребителя с функцией полезности $u^*(.)$.

<u>Доказательство</u>:

Пусть $\hat{\boldsymbol{x}}$ — произвольный потребительский набор, удовлетворяющий бюджетному ограничению при некоторых ценах $\boldsymbol{p}$ и доходе R:

$$\boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}} \leqslant R.$$

Рассмотрим задачу (#) с $\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}}$. Цены $\boldsymbol{p}$ являются допустимыми в этой задаче, а $u^*(\hat{\boldsymbol{x}})$ — значение этой задачии. Поэтому $v(\boldsymbol{p}, R) \geqslant u^*(\hat{\boldsymbol{x}})$.

Поскольку $u^*(\tilde{\boldsymbol{x}}) = v(\boldsymbol{p}, R)$, то $u^*(\tilde{\boldsymbol{x}}) \geqslant u^*(\hat{\boldsymbol{x}})$.

■

Поскольку существует бесконечно много функций полезности, описывающих одни и те же предпочтения, то дифференциальные уравнения, порождаемые тождеством Роя, не позволяют однозначно восстановить непрямую функцию полезности: если эти уравнения имеют хотя бы одно решение, то решений бесконечно много. Чтобы решение было единственным, необходимо наложить дополнительные ограничения на непрямую функцию полезности.

В простом случае, когда известно, что восстанавливаемые предпочтения могут быть представлены квазилинейной функцией полезности, —

$$u(x_1, ..., x_l) = s(x_1, ..., x_{l-1}) + x_l, \text{ —}$$

такая нормировка определяется самим видом функции.

Приведем сначала характеристики функции спроса. Предположим, что $s(x_1, ..., x_{l-1})$ — строго вогнутая дифференцируемая функция, и выбор потребителя при некоторых ценах и доходе содержит все продукты в положительном количестве, т.е. $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) \gg \mathbf{0}$. Тогда по теореме Куна-Таккера при некотором положительном λ верны соотношения $\dfrac{\partial s}{\partial x_i} = \lambda p_i$ $(i \neq l)$ и $p_l\lambda = 1$. Будем предполагать без потери общности, что $p_l = 1$. Тогда $\lambda = 1$, и

$$\frac{\partial s}{\partial x_i}(x_1, ..., x_{l-1}) = p_i, \ \ i \neq l.$$

Эти соотношения определяют функцию спроса на все блага, кроме последнего. Отсюда следует, что спрос на эти блага не зависит от дохода:

$$x_i = x_i(p_1, ..., p_{l-1}) = x_i(\boldsymbol{p}_{-l}), \ \ i \neq l.$$

Пользуясь видом функции спроса, получаем, что непрямая функция полезности имеет вид

$$v(\boldsymbol{p}_{-l}, 1, R) = s(x_1(\boldsymbol{p}_{-l}), ..., x_{l-1}(\boldsymbol{p}_{-l})) + R - \sum_{i=1}^{l-1} p_i x_i(\boldsymbol{p}_{-l}).$$

При этом $\dfrac{\partial v}{\partial R}(p,R) = 1$, и $\dfrac{\partial v(p,R)}{\partial p_i}$ не зависит от R. Поэтому, интегрируя $l-1$ уравнений тождества Роя, по $p^1, \ldots, p^{l-1}$ соответственно, мы можем получить (с точностью до константы интегрирования) искомую функцию $\nu(.)$ в любой данной точке. Отметим также, что соответствующие интегралы будут равны изменению так называемого потребительского излишка.

Особенно простой задача восстановления предпочтений оказывается, если известно (дополнительно к квазилинейности), что функция полезности сепарабельна, т.е.

$$u(x_1, ..., x_l) = \sum_{i=1}^{l-1} s_i(x_i) + x_l.$$

Условия первого порядка для задачи потребителя в предположении, что потребитель при рассматриваемых ценах и доходах предъявляет спрос на все блага ($\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) \gg 0$), имеют вид

$$\frac{\partial s_i(x_i(\boldsymbol{p}))}{\partial x_i} = \frac{p_i}{p_l}.$$

Если цена последнего блага равна единице, то соотношение

$$\frac{\partial s_i(x_i(\boldsymbol{p}))}{\partial x_i} = p_i.$$

фактически задает обратную функцию спроса $p_i(x_i)$. При этом спрос на каждое благо зависит только от его цены, т.е. $x_i(\boldsymbol{p}) = x_i(p_i)$.

Непрямая функция полезности имеет вид

$$v(\boldsymbol{p}, R) = \sum_{i=1}^{l-1} s_i(x_i(p_i)) + R - \sum_{i=1}^{l-1} p_i x_i(p_i),$$

Из тождества Роя получаем соотношение:

$$x_i(p_i) = -\frac{\partial v}{\partial p_i}(\boldsymbol{p}, R) \Big/ \frac{\partial v}{\partial R}(\boldsymbol{p}, R) = -\frac{\partial v}{\partial p_i}(\boldsymbol{p}, R) = -\frac{\partial v_i}{\partial p_i}(p_i),$$

где $v_i(p_i) = s_i(x_i(p_i)) - p_i x_i(p_i)$, и, следовательно,

$$-\int_{p_i}^{+\infty} \frac{\partial v_i}{\partial p_i}(t)dt = \int_{p_i}^{+\infty} x_i(t)dt,$$

Откуда

$$v_i(p_i) - \lim_{p_i \to +\infty} v_i(p_i) = \int_{p_i}^{+\infty} x_i(t)dt,$$

или

$$v_i(p_i) = \int_{p_i}^{+\infty} x_i(t)dt + \text{const}.$$

Интеграл в последнем соотношении есть по определению потребительский излишек:

$$\mathrm{CS}_i(p_i) = \int_{p_i}^{+\infty} x_i(t)\,\mathrm{d}t.$$

Отсюда

$$v(\boldsymbol{p}, R) = \sum_{i=1}^{l-1} v_i(p_i) + R = \sum_{i=1}^{l-1} \mathrm{CS}_i(p_i) + R + \text{const}.$$

Можно восстановить также непосредственно прямую функцию полезности, проинтегрировав уравнения условий первого порядка задачи потребителя

$$\frac{\partial s_i(x_i(p_i))}{\partial x_i} = p_i.$$

Действительно,

$$s_i(x_i) = \int_0^{x_i} p_i(t)dt + s_i(0).$$

Интеграл в этом соотношении является альтернативной формой определения потребительского излишка, поэтому

$$s_i(x_i) = \mathrm{CS}_i(x_i) + s_i(0)$$

и

$$u(x_1, ..., x_l) = \sum_{i=1}^{l-1} \mathrm{CS}_i(x_i) + x_l + \mathrm{const}.$$

В общем случае на основе системы функций спроса естественно восстанавливать так называемую денежную полезность $\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})$. Введем соответствующие определения.

Определение 22. Денежная полезность $\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})$ — это доход, который требуется, чтобы при ценах $\boldsymbol{q}$ потребитель мог бы иметь уровень полезности $u(\boldsymbol{x})$, т.е.

$$\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}) = e(\boldsymbol{q}, u(\boldsymbol{x})).$$

Утверждение 25. Денежная полезность $\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})$ является функцией полезности, т.е

$$\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}) \geqslant \mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{y}) \Leftrightarrow u(\boldsymbol{x}) \geqslant u(\boldsymbol{y}).$$

Доказательство:

По определению $\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}) = e(\boldsymbol{q}, u(\boldsymbol{x}))$. Поэтому утверждение является следствием возрастания функции расходов по полезности (см. Утверждение **18** (5)).

■

По аналогии с данным понятием вводится так называемая денежная непрямая полезность.

Определение 23. Денежная непрямая полезность $\mu(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{p}, R)$ — это доход, который требуется, чтобы при ценах $\boldsymbol{q}$ потребитель мог бы иметь тот же уровень полезности, что и при ценах $\boldsymbol{p}$, располагая доходом R, т.е.

$$\mu(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{p}, R) = e(\boldsymbol{q}, v(\boldsymbol{p}, R)).$$

Утверждение 26. Денежная непрямая полезность $\mu(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{p}, R)$ является непрямой функции полезности для денежной функции полезности $\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})$.

Доказательство:

По определению денежной непрямой полезности $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R) = e(\boldsymbol{q}, v(\boldsymbol{p},R))$. Кроме того, $\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}) = e(\boldsymbol{q}, u(\boldsymbol{x}))$. Поскольку $v(\boldsymbol{p},R) = u(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R))$, то $\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)) = \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$.

■

Поскольку $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R) = e(\boldsymbol{q}, v(\boldsymbol{p},R))$, то верно соотношение

$$\frac{\partial\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)}{\partial q_i} = \frac{\partial e(\boldsymbol{q}, v(\boldsymbol{p}, R))}{\partial q_i} = h_i(\boldsymbol{q}, v(\boldsymbol{p},R)) =$$

$$= x_i(\boldsymbol{q}, e(\boldsymbol{q}, v(\boldsymbol{p},R))) = x_i(\boldsymbol{q}, \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)).$$

Мы воспользовались здесь тем, что

$$\frac{\partial e(p,U)}{\partial p_i} = h_i(\boldsymbol{p},U)$$

и

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}, U) \equiv \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p}, U)).$$

Тем самым мы получили систему дифференциальных уравнений относительно непрямой функции полезности $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$:

$$\frac{\partial\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)}{\partial q_i} = x_i(\boldsymbol{q}, \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)).$$

К ней следует добавить граничные условия

$$\mu(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{p}, R) = R.$$

Из теории дифференциальных уравнений в частных производных известно, что эта система имеет (локальное) решение тогда и только тогда, когда система функций спроса такова, что матрица

$$\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{i,j}$$

симметрична. Это условие, как несложно показать, эквивалентно условию симметричности матрицы коэффициентов замены

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i}{\partial R} x_j\right)_{i,j}.$$

Если у нас есть некоторая система функций спроса, то мы можем получить решение данных уравнений. Однако, можем ли мы быть уверены в том, что система функций спроса совместима с моделью рационального поведения потребителя, т.е., что существует функция полезности, максимизация которой порождает данную систему функций?

Необходимые условия того, что данная система функций спроса порождена моделью рационального поведения, нам известны:

- ♦ Система функций спроса $x_i(\boldsymbol{p},R)$ однородна нулевой степени.
- ♦ Система функций спроса $x_i(\boldsymbol{p},R)$ удовлетворяет закону Вальраса $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R))=R$ (если предпочтения потребителя локально неасыщаемы).
- ♦ Матрица коэффициентов замены

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i}{\partial R} x_j\right)_{i,j}.$$

является симметричной и отрицательно полуопределенной.

Оказывается, что эти условия являются и достаточными, т.е. любая система функций, удовлетворяющая этим условиям, может быть порождена некоторой моделью рационального поведения.

Предположим, что рассматриваемая система функций спроса удовлетворяет этим условиям (мы будем предполагать также дифференцируемость $x_i(\boldsymbol{p},R)$). Рассмотрим, какие свойства функции $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$, являющейся решением системы дифференциальных уравнений,

$$\frac{\partial\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)}{\partial q_i} = x_i(\boldsymbol{q}, \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)) \qquad (\#\#)$$

с граничными условиями

$$\mu(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{p}, R) = R.$$

следуют из этих свойств $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R)$.

♦ Функция $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$ дифференцируема по $\boldsymbol{q}$.

♦ Функция $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$ однородна первой степени по $\boldsymbol{q}$ (поскольку производная функции положительно однородна степени n тогда и только тогда, когда сама функция однородна степени $n + 1$).

♦ Функция $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$ не убывает по $\boldsymbol{q}$.

♦ Функция $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$ вогнута по $\boldsymbol{q}$.

Предположим дополнительно, что решение $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$ рассматриваемой системы единственно.

Тогда $\forall \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}'$ верно соотношение

$$\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R) = \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}', R) \Leftrightarrow \mu(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p}, R) = \mu(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p}', R).$$

Поскольку $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$ непрерывна по $\boldsymbol{q}$, то это гарантирует выполнение $\forall \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}'$ следующего соотношения

$$\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R) \geqslant \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}', R) \Leftrightarrow \mu(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p}, R) \geqslant \mu(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p}', R).$$

Утверждение 27. Пусть функция $\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)$ дифференцируема, однородна первой степени, не убывает и вогнута по $\boldsymbol{q}$ и выполнено

$$\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R) \geqslant \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}', R) \Leftrightarrow \mu(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p}, R) \geqslant \mu(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p}', R),\ \forall \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}' \geqslant \boldsymbol{0}.$$

Тогда

(1) $$\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R) = \min\nolimits_{\boldsymbol{x}\in V(\boldsymbol{p},R)} \boldsymbol{qx},$$

где

$$V(\boldsymbol{p}, R) = \{\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0} \mid \boldsymbol{qx}\geqslant\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)\ \forall\boldsymbol{q}\geqslant\boldsymbol{0}\}.$$

(2) для произвольных векторов $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'\gg\boldsymbol{0}$ выполнено

$$V(\boldsymbol{p}, R) \subseteq V(\boldsymbol{p}', R) \quad \text{или} \quad V(\boldsymbol{p}', R) \subseteq V(\boldsymbol{p}, R).$$

Доказательство:

(1) Из свойств функции $\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)$ и определения множества $V(\boldsymbol{p}, R)$ следует, что $V(\boldsymbol{p}, R)$ непусто, замкнуто и ограничено снизу. Если $\boldsymbol{q} \gg \boldsymbol{0}$ то эти условия гарантируют существование решения задачи $\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R) = \min_{\boldsymbol{x}\in V(\boldsymbol{p},R)} \boldsymbol{qx}$. Из определения $V(\boldsymbol{p}, R)$ следует, что $\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R) \leqslant \min_{\boldsymbol{x}\in V(\boldsymbol{p},R)} \boldsymbol{qx}$. Нам требуется показать, что это соотношение выполняется как равенство. Для этого достаточно показать, что $\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)\geqslant \min_{\boldsymbol{x}\in V(\boldsymbol{p},R)} \boldsymbol{qx}$. Вогнутость функции $\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)$ по $\boldsymbol{q}$ влечет, что для любых $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{q}'$ выполнено неравенство:

$\mu(\boldsymbol{q}';\boldsymbol{p},R) \leqslant \mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R) + \nabla_{\boldsymbol{q}}\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)(\boldsymbol{q}' - \boldsymbol{q})$.

Поскольку $\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)$ однородна первой степени по $\boldsymbol{q}$ то по формуле Эйлера

$\nabla_{\boldsymbol{q}}\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)\boldsymbol{q} = \mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)$,

поэтому для любого $\boldsymbol{q}'$

$\mu(\boldsymbol{q}';\boldsymbol{p},R) \leqslant \nabla_{\boldsymbol{q}}\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)\boldsymbol{q}'$.

В силу того, что $\nabla_{\boldsymbol{q}}\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R) \geqslant 0$, имеем $\nabla_{\boldsymbol{q}}\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R) \in V(\boldsymbol{p}, R)$. Отсюда следует, что $\min_{\boldsymbol{x}\in V(\boldsymbol{p},R)} \boldsymbol{qx} \leqslant \nabla_{\boldsymbol{q}}\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)\boldsymbol{q} = \mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R)$. Таким образом, получили требуемое равенство $\mu(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p},R) = \min_{\boldsymbol{x}\in V(\boldsymbol{p},R)} \boldsymbol{qx}$.

(2) Из определения множеств $V(.)$ следует, что если

$\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}',R) \geqslant \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p},R)\ \forall \boldsymbol{q} \geqslant \boldsymbol{0}$,

то $V(\boldsymbol{p}, R) \subseteq V(\boldsymbol{p}', R)$.

■

Приведенное утверждение позволяет построить предпочтения на множестве всех потребительских наборов, реализуемых как спрос. Нестрогое отношение предпочтения задается по следующему правилу:

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) \succsim \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}', R) \Leftrightarrow V(\boldsymbol{p}, R) \subseteq V(\boldsymbol{p}', R).$$

Для произвольной точки $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^l_+$ построить функцию полезности по полученной из рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (##) функции $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$ можно на основе решения задачи (#), которая в данном случае приобретает следующий вид:

$$\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R) \to \inf_{\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^l_{++}}$$
$$\boldsymbol{px} \leqslant R. \qquad (\#\#\#)$$

Построенная функция полезности

$$u^*(.) = \inf\{\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R) \mid \boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^l_{++}, \boldsymbol{px} \leqslant R\}$$

будет соответствовать наблюдаемому спросу, на основе которого она получена, что следует из следующего утверждения.

Утверждение 28. Пусть функция спроса $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ дифференцируема, однородна нулевой степени, удовлетворяет закону Вальраса, матрица коэффициентов замены является симметричной и отрицательно полуопределенной и решение системы (##) единственно, т.е.

$$\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R) = \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}', R) \Leftrightarrow \mu(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p}, R) = \mu(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p}', R),\ \forall \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}' \gg \boldsymbol{0}.$$

Тогда, если $u^*(.)$ построена на основе задачи (###) при некотором векторе $\boldsymbol{q} \gg \boldsymbol{0}$, то спрос $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$ $\forall \boldsymbol{p} \gg \boldsymbol{0}$, $R > 0$, является решением задачи потребителя с функцией полезности $u^*(.)$.

Доказательство:

Докажем сначала, что $u^*(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) = \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$. Вектор $\boldsymbol{p}$ является допустимым в задаче (###) при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)$. Нам остается показать, что для любого вектора $\boldsymbol{p}' \geqslant \boldsymbol{0}$, такого что $\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) \leqslant R$, выполнено $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}', R) \geqslant \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$.

Поскольку функция $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$ вогнута по $\boldsymbol{q}$, то

$$\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R) \geqslant \mu(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p}, R) + (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}')\,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}, \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)).$$

При $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}$, используя закон Вальраса, имеем, что

$$\boldsymbol{q}'\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) \geqslant \mu(\boldsymbol{q}';\ \boldsymbol{p}, R) \qquad \forall\ \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}'.$$

Поскольку $R = \mu(\boldsymbol{p}';\ \boldsymbol{p}', R)$, то неравенство $\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) \leqslant R$ можно переписать в виде $\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) \leqslant \mu(\boldsymbol{p}';\ \boldsymbol{p}', R)$. С другой стороны, по только что доказанному, $\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) \geqslant \mu(\boldsymbol{p}';\ \boldsymbol{p}, R)$. Поэтому при $\boldsymbol{p}'\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R) \leqslant R$ имеем $\mu(\boldsymbol{p}';\ \boldsymbol{p}, R) \leqslant \mu(\boldsymbol{p}';\ \boldsymbol{p}', R)$. Поскольку система (##) имеет единственное решение и это решение непрерывно, то отсюда следует, что $\mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}', R) \geqslant \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$.

Используя $u^*(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) = \mu(\boldsymbol{q};\ \boldsymbol{p}, R)$, несложно показать, что $u^*(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, R)) \geqslant u^*(\boldsymbol{x})$ для любого набора $\boldsymbol{x}$, такого что $\boldsymbol{px} \leqslant R$.

■

Приведенные выше необходимые и достаточные условия интергрируемости позволяют для заданной явно системы функций спроса определить, совместима ли она с моделью рационального поведения потребителя. В ситуации, когда нам доступно лишь конечное число значений функции спроса, полученных на основе наблюдений за фактическим поведения потребителя, проверить совместимость этих наблюдений с моделью рационального поведения позволяет так называемая концепция выявленных предпочтений. Основные ее положения приводятся в следующем параграфе.

<u>Тесты и задачи для самостоятельного решения</u>

1. Для каждого потребительского набора $\boldsymbol{x}$ и вектора цен $\boldsymbol{p}$ определим функцию $m(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$ как минимальную стоимость потребительского набора, полезность которого не ниже, чем полезность набора $\boldsymbol{x}$, т.е. как значение следующей задачи:

$$\boldsymbol{pz} \to \min_{\boldsymbol{z}}$$
$$u(\boldsymbol{z}) \geqslant u(\boldsymbol{x}).$$

Покажите, что при каждом (положительном) векторе цен $\boldsymbol{p}$ полученная характеристика потребительских наборов представляет собой функцию полезности для соответствующих предпочтений. Дайте графическую интерпретацию процесса ее построения.

2. Пусть функция $u(.)$ — функция полезности, представляющая строго выпуклые и строго монотонные предпочтения, $v(.)$ — соответствующая непрямая функция полезности. Покажите, что если $u^*(.)$ построена на основе задачи (#), то $u^*(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x})$ $\forall$ $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^l_{++}$.

Указание: Используйте теорему отделимости (см. доказательство утверждения о восстановлении технологического множества по функции прибыли). Множество $L^{++}(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x}\}$ можно отделить от точки $\boldsymbol{x}$. Поскольку предпочтения строго монотонны, то нормаль $\boldsymbol{p}$ к отделяющей гиперплоскости — вектор с положительными коэффициентами. Тогда $\boldsymbol{p}$ — решение задачи (#).

3. Пусть функция $e(\boldsymbol{p}, U)$ дифференцируема, однородна первой степени, не убывает и вогнута по $\boldsymbol{p}$. Определим функцию $u(.)$ по формуле

$u(\boldsymbol{x}) = U$, если $\exists\ U, \boldsymbol{p}\gg\boldsymbol{0}$, такие что $\boldsymbol{x} = \nabla_{\boldsymbol{p}}\, e(\boldsymbol{p}, U)$.

$u(\boldsymbol{x}) = -\infty$ в противном случае

Покажите, что $e(\boldsymbol{p}, U)$ — функция затрат для функции полезности $u(.)$.

4. Пусть функция $u(.)$ — функция полезности, представляющая строго выпуклые и строго монотонные предпочтения, а $e(\boldsymbol{p}, U)$ — соответствующая ей функция затрат, $h(\boldsymbol{p}, U)$ — хиксианская функция спроса, а $x(\boldsymbol{p}, R)$ — маршаллианская функция спроса. Определим множество

$$\mathcal{X} = \{\boldsymbol{x} \mid \exists\ U, \boldsymbol{p}\gg\boldsymbol{0}\colon \boldsymbol{x} = \nabla_{\boldsymbol{p}}\, e(\boldsymbol{p}, U)\},$$

и функцию $u^*(.)$ по формуле

$u(\boldsymbol{x}) = U$, если $\boldsymbol{x}\in \mathcal{X}$,

$u(\boldsymbol{x}) = -\infty$ в противном случае.

Пусть $e^*(\boldsymbol{p}, U)$ — функция затрат, $h^*(\boldsymbol{p}, U)$ — хиксианская функция спроса, а $x^*(\boldsymbol{p}, R)$ — маршаллианская функция спроса, соответствующие функции полезности $u^*(.)$.

Покажите, что

$u^*(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}\in \mathcal{X}$,

$e^*(\boldsymbol{p}, U) = e(\boldsymbol{p}, U)$,

$h^*(\boldsymbol{p}, U) = h(\boldsymbol{p}, U)$,

$x^*(\boldsymbol{p}, R) = x(\boldsymbol{p}, R)$.

5. Пусть функция $e(\boldsymbol{p}, U)$ дифференцируема, однородна первой степени, не убывает и вогнута по $\boldsymbol{p}$. Тогда

$$e(\boldsymbol{p}, U) = \min\nolimits_{\boldsymbol{x}\in V(U)} \boldsymbol{p}\boldsymbol{x},$$

где

$$V(U) = \{\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0} \mid \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}\geqslant e(\boldsymbol{p}, U)\ \forall\ \boldsymbol{p}\geqslant\boldsymbol{0}\}.$$

6. Пусть $u(\boldsymbol{x})$ — функция полезности. Вычислите для нее непрямую функцию полезности, решите задачу (#) и вычислите "восстановленную" функцию полезности $u^*(\boldsymbol{x})$. Совпадает ли она с исходной функцией полезности? Решите задачу для следующих функций полезности:

а) $u(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k \ln \boldsymbol{x}_k$; б) $u(\boldsymbol{x}) = \min_k \alpha_k \boldsymbol{x}_k$;

в) $u(\boldsymbol{x}) = \min(2x_1 - x_2,\ 2x_2 - x_1)$; г) $u(\boldsymbol{x}) = \sqrt[3]{\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2} + \boldsymbol{x}_3$.

7. Для функций полезности предыдущей задачи найдите денежную функцию полезности и непрямую денежную функцию полезности.

8. Для функций полезности предыдущей задачи найдите спрос, восстановите непрямую денежную функцию полезности, решив уравнения (##) и постройте "восстановленную" функцию полезности $u^*(\boldsymbol{x})$ в соответствии с задачей (###). Правильно ли восстановлены исходные предпочтения? Найдите спрос, соответствующий функции полезности $u^*(\boldsymbol{x})$. Совпадает ли он с исходным спросом?

9. Предположим, что на рынке обращаются три товара и цена третьего товара равна 1. Функции спроса на первый и второй товар имеют вид

$$x_1(\boldsymbol{p}, R) = a_1 + b_1 p_1 + c_1 p_2 + d_1 p_1 p_2,$$
$$x_2(\boldsymbol{p}, R) = a_2 + b_2 p_1 + c_2 p_2 + d_2 p_1 p_2.$$

Найдите функцию спроса на третий товар в предположении выполнения закона Вальраса. Функция полезности какого вида могла бы породить этот спрос? Какие ограничения на параметры гарантируют, что это функция спроса рационального потребителя?

1.7. Концепция выявленных предпочтений

Рассмотрим ряд ситуаций выбора, с которыми сталкивается рассматриваемый потребитель. В i-й ситуации заданы цены $\boldsymbol{p}_i$ и набор $\boldsymbol{x}_i$, который выбрал потребитель при данных ценах.

Предположим, что $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_2$. Из этого неравенства следует, что набор $\boldsymbol{x}_2$ был доступен в 1-й ситуации выбора (при ценах $\boldsymbol{p}_1$ имеющийся у потребителя доход позволял купить этот набор), но не был выбран. Это означает, что в ситуации, когда выбор потретителя основан на полном и транзитивном отношении предпочтения, $\boldsymbol{x}_2$ не может быть лучше выбранного набора $\boldsymbol{x}_1$. Таким образом, если выбор был рационален, то должно выполнятся отношение $\boldsymbol{x}_1 \succsim \boldsymbol{x}_2$. Из этого отношения и локальной ненасыщаемости предпочтений потребителя следует, что $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_1$ не может быть меньше $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_2$. Если $\boldsymbol{x}_1 \succ \boldsymbol{x}_2$, то это очевидно. Предположим, что $\boldsymbol{x}_1 \sim \boldsymbol{x}_2$. Если бы $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_1 < \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_2$, то нашлась бы окрестность точки $\boldsymbol{x}_1$, все точки которой доступны во 2-й ситуации выбора, а в этой окрестности нашелся бы набор, лучший, чем $\boldsymbol{x}_2$.

Таким образом, при рациональности поведения и локальной ненасыщаемости из $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_2$ следует, что $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_2$.

Аналогично устанавливается следующее соотношение: из $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_1 > \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_2$ следует, что $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_1 > \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_2$.

Если дополнительно предположить, что выбор потребителя везде однозначен (например, в предположении строгой выпуклости отношения предпочтения) то если $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$, то, применяя аналогичные рассуждения, можно доказать, что из $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_2$ следует, что $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_1 > \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_2$.

Определение 24. Говорят, что функция спроса $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет слабой аксиоме выявленного предпочтения, если для любой пары $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{x}_1)$, $(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{x}_2)$ такой что $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}_1)$, $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}_2)$, из того, что $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_2$ следует, что $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_2$. Другими словами, слабая аксиома постулирует, что неравенства $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_2$ и $\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_2 > \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_1$ не могут быть верными одновременно.

Потребительский выбор предствляет частный случай выбора, когда ситуации выбора описываются бюджетными множествами $\mathrm{B}(\boldsymbol{p}, R)$, а правила выбора ставят с соответствие $\mathrm{B}(\boldsymbol{p}, R)$ выбранный потребителем при данных ценах потребительский набор. Заметим, что слабая аксиома выявленных предпочтений — переформулировка на данный случай аксиомы Хаутеккера.

Определение 25. Говорят, что функция спроса $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет сильной аксиоме выявленных предпочтений, если для любой последовательности $\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{p}_n, \boldsymbol{x}_n$ такой что $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}_i)$, из того, что

$$\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_2$$
$$\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_2 \geqslant \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_3$$
$$\dots\ \dots\ \dots$$
$$\boldsymbol{p}_{n-1}\,\boldsymbol{x}_{n-1} \geqslant \boldsymbol{p}_{n-1}\,\boldsymbol{x}_n$$

следует, что $\boldsymbol{p}_n\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{p}_n\boldsymbol{x}_n$.

Утверждение 29.

Если выборы порождены моделью рационального поведения, то выполняются сильная и слабая аксиомы выявленного предпочтения.

<u>Доказательство</u>:

Слабое свойство мы доказали выше. Теперь докажем сильное.

Предположим, что

$$\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_2,\quad \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_2 \geqslant \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_3,\ \dots,\quad \boldsymbol{p}_{n-1}\boldsymbol{x}_{n-1} \geqslant \boldsymbol{p}_{n-1}\boldsymbol{x}_n.$$

Тогда $\boldsymbol{x}_{i+1} \succeq \boldsymbol{x}_i\ \forall i$. По транзитивности предпочтений $\boldsymbol{x}_1 \succeq \boldsymbol{x}_n$. Тогда $\boldsymbol{p}_n\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{p}_n\boldsymbol{x}_n$.

■

Аналогично устанавливается следующее

Утверждение 30.

Если выборы порождены моделью рационального поведения с локально ненасыщаемым нестрогим отношением предпочтения, то выполняются сильная и слабая аксиомы выявленного предпочтения в следующей модифицированной форме:

Для любой последовательности $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{x}_2,...,\boldsymbol{p}_n\ \boldsymbol{x}_n$, такой что $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}_i)$, если

$$\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}_2$$
$$\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_2 \geqslant \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}_3$$
$$\dots\ \dots\ \dots$$
$$\boldsymbol{p}_{n-1}\,\boldsymbol{x}_{n-1} \geqslant \boldsymbol{p}_{n-1}\,\boldsymbol{x}_n$$

причем хотя бы одно из этих неравеств строгое, то

$$\boldsymbol{p}_n\boldsymbol{x}_1 > \boldsymbol{p}_n\boldsymbol{x}_n.$$

<u>Доказательство</u>:

Доказательство оставляется читателю в качестве упражнения.

■

Таким образом, любая система функций спроса, порожденная моделью рационального поведения, удовлетворяет сильной аксиоме выявленного предпочтения. Оказывается, верно и обратное утверждение: если выборы потребителя удовлетворяют сильной аксиоме выявленных предпочтений, то существует предпочтения, порождающие эти выборы. (Ясно, что такие предпочтения не единственны). Доказательство этого утверждения достаточно громоздко и мы его упускаем.

Тесты и задачи для самостоятельного решения

1. Функция спроса рационального потребителя удовлетворяет...
- ♦ как слабой, так и сильной аксиомам выявленных предпочтений
- ♦ только слабой аксиоме выявленных предпочтений
- ♦ сильной аксиоме выявленных предпочтений тогда и только тогда, когда предпочтения гомотетичны

2. Индивидуум при ценах (4, 6) выбирает набор (6, 6), а при ценах (6, 3) он выбирает набор (10, 0). Его поведение:
- ♦ удовлетворяет аксиоме выявленных предпочтений;
- ♦ не удовлетворяет аксиоме выявленных предпочтений;
- ♦ не достаточно информации.

3. Индивидуум при ценах (4, 6) выбирает набор (6, 6), а при ценах (6, 3) он выбирает набор (10, 10). Его поведение:
- ♦ не согласуется с аксиомой выявленных предпочтений;
- ♦ невозможно сказать определенно;
- ♦ согласуется с аксиомой выявленных предпочтений.

4. При ценах (1, 4) выбор потребителя был (2, 3). Этот набор выявленно предпочитается набору
- ♦ (5, 2)
- ♦ (8, 1)
- ♦ (15, 0)

5. Какое из нижеприведенных утверждений неверно
- ♦ индивидуальная функция спроса рационального потребителя всегда удовлетворяет аксиомам выявленного предпочтения
- ♦ агрегированная функция спроса всегда удовлетворяет аксиомам выявленного предпочтения
- ♦ индивидуальная функция спроса рационального потребителя всегда удовлетворяет слабой аксиомой выявленного предпочтения, но не удовлетворяет сильной аксиоме

6. При ценах (2, 1) выбор потребителя был (2, 2). Этот набор выявленно предпочитается набору
- ♦ (1, 5)
- ♦ (5, 0)
- ♦ (0, 5)

7. Совместимы ли с моделью рационального поведения с локально ненасыщаемой функцией полезности следующие наблюдения рыночного поведения потребителя:
$\boldsymbol{x}(10, 10, 10) = (10,10, 10)$; $\boldsymbol{x}(10, 1, 2) = (9, 25, 7.5)$; $\boldsymbol{x}(1, 1, 10) = (15, 5, 9)$

(т.е. спрос при ценах (10, 10, 10) равен соответственно (10, 10, 10) и т.д.).

8. Рациональный потребитель в базовом периоде при ценах $\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{b}}$ выбрал объем потребления $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}}$, а в периоде t при ценах $\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{t}}$ выбрал объем потребления $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{t}}$. Индексы (физического объема) Пааше и Ласпейреса по определению равны

$$P_{\boldsymbol{q}} = \frac{(\boldsymbol{p}^t, \boldsymbol{x}^t)}{(\boldsymbol{p}^t, \boldsymbol{x}^b)}, \qquad L_{\boldsymbol{q}} = \frac{(\boldsymbol{p}^b, \boldsymbol{x}^t)}{(\boldsymbol{p}^b, \boldsymbol{x}^b)},$$

Какой из наборов $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{t}}$, $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}}$ лучше для потребителя

(а) если $P_{\boldsymbol{q}} > 1$, (б) если $L_{\boldsymbol{q}} > 1$.

9. Пусть $P_{\boldsymbol{p}}$, $L_{\boldsymbol{p}}$ — индексы (цен) Пааше и Ласпейреса, а M — отношение потребительских расходов в период t к потребительским расходам в базовом периоде:

$$M = \frac{(\boldsymbol{p}^t, \boldsymbol{x}^t)}{(\boldsymbol{p}^b, \boldsymbol{x}^b)},$$

Какой из наборов $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{t}}$, $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}}$ лучше для потребителя

(а) если $P_{\boldsymbol{q}} > M$, (б) если $L_{\boldsymbol{q}} > M$.

10. Покажите на примере, что функция совокупного спроса, полученная на основе суммирования конечного числа маршаллианских функций спроса, вообще говоря, не удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений.

11. Покажите, что если предпочтения потребителей одинаковы, а представляющая их функция полезности — непрерывная строго вогнутая и положительно однородная первой степени, то функция совокупного спроса удовлетворяет аксиоме выявленного предпочтения.

12. В случае двух товаров спрос задается следующими функциями

$$x_1 = \frac{p_2}{p_3} \qquad x_2 = -\frac{p_1}{p_3} \qquad x_3 = \frac{R}{p_3}$$

а) проверьте что данная система функций спроса удовлетворяет закону Вальраса и однородна нулевой степени по ценам и доходу.

б) покажите, что для данной системы функций спроса не выполняется слабая аксиома выявленных предпочтений

13. Докажите, что если предпочтения потребителя монотонны и строго вогнуты, то его функция спроса удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений.

1.8. Оценка изменения благосостояния.

Перед экономистами часто стоит задача оценить изменения в благосостоянии потребителей при проведении мероприятий экономической политики. Рассмотрим две ситуации (до проведения мероприятий экономической политики и после). В первой их них потребитель сталкивается с ценами $\boldsymbol{p}^0$ и доходом R^0, во второй — с ценами $\boldsymbol{p}^1$ и доходом R^1. Пусть при ценах $\boldsymbol{p}^0$ и доходе R^0 непрямая функция полезности потребителя равна $v(\boldsymbol{p}^0,R^0)$, а при $(\boldsymbol{p}^1,R^1)$ — $v(\boldsymbol{p}^1,R^1)$. Если $v(\boldsymbol{p}^0,R^0) < v(\boldsymbol{p}^1,R^1)$, то вторая ситуация более благоприятна для потребителя, а если $v(\boldsymbol{p}^0,R^0) > v(\boldsymbol{p}^1,R^1)$, то менее благоприятна.

Вообще говоря, мы можем говорить лишь о направлении изменения благосостояния, а не оценивать его величину. И, тем не менее, при расчетах издержек и выгод мероприятий экономической политики пытаются получить количественные оценки таких изменений. При этом используются введенные выше денежные функции полезности. Опишем процедуры их использования и возникающие здесь проблемы.

Непрямую функцию полезности можно определить на основе любого «базового» вектора цен $\boldsymbol{q} \gg 0$. Оценка изменения благосостояния при этом будет равна

$$\Delta\mu(\boldsymbol{q}) = \mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}^1, R^1) - \mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}^0, R^0).$$

Значение $\Delta\mu(\boldsymbol{q})$, вообще говоря, может быть различным для разных векторов $\boldsymbol{q}$, и поэтому соответствующие оценки изменения благосостояния содержат элемент субъективизма. Исключением являются квазилинейные предпочтения (предпочтения, которые описываются квазилинейной функцией полезности). В этом случае все меры благосостояния эквивалентны с точностью до постоянного множителя, а в случае, когда цена последнего блага равна единице (последнее благо является *numeraire*), они совпадают.

Покажем это, вычислив $\Delta\mu(\boldsymbol{q})$ для квазилинейной функции полезности

$$u(x_1, ..., x_l) = s(x_1, ..., x_{l-1}) + x_l,$$

со строго вогнутой дифференцируемой функцией $s(.)$ в предположении, что $p_l = 1$. Вспомним, что в этом случае непрямая функция полезности имеет вид

$$v(\boldsymbol{p}_{-l}, 1, R) = s(x_1(\boldsymbol{p}_{-l}), ..., x_{l-1}(\boldsymbol{p}_{-l})) + R - \sum_{i=1}^{l-1} p_i x_i(\boldsymbol{p}_{-l}).$$

Пользуясь соотношениями двойственности получаем, что функция расходов в случае квазилинейных предпочтений имеет вид

$$e(\boldsymbol{p}, U) = U - s(\boldsymbol{x}_{-l}(\boldsymbol{p}_{-l})) + \boldsymbol{p}_{-l}\boldsymbol{x}_{-l}(\boldsymbol{p}_{-l}).$$

По определению непрямой денежной функции полезности

$$\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, R) = e(\boldsymbol{q}, v(\boldsymbol{p}, R)),$$

Поэтому

$$\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, R) = v(\boldsymbol{p}, R) - s(\boldsymbol{x}_{-l}(\boldsymbol{q}_{-l})) + \boldsymbol{q}_{-l}\boldsymbol{x}_{-l}(\boldsymbol{q}_{-l}).$$

По определению $\Delta\mu(\boldsymbol{q})$ имеем, что

$$\begin{aligned}\Delta\mu(\boldsymbol{q}) &= \mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}^1, R^1) - \mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}^0, R^0) = v(\boldsymbol{p}^1, R^1) - s(\boldsymbol{x}_{-l}(\boldsymbol{q}_{-l})) + \\ &+ \boldsymbol{q}_{-l}\boldsymbol{x}_{-l}(\boldsymbol{q}_{-l}) - v(\boldsymbol{p}^0, R^0) + s(\boldsymbol{x}_{-l}(\boldsymbol{q}_{-l})) - \boldsymbol{q}_{-l}\boldsymbol{x}_{-l}(\boldsymbol{q}_{-l}) = \\ &= v(\boldsymbol{p}^1, R^1) - v(\boldsymbol{p}^0, R^0).\end{aligned}$$

В общем случае, когда значение $\Delta\mu(\boldsymbol{q})$ зависит от выбора $\boldsymbol{q}$, естественными кандидатами на выбор вектора $\boldsymbol{q}$ представляются следующие системы цен — цены в первой ситуации (до изменений) — $\boldsymbol{p}^0$ и цены после изменений — $\boldsymbol{p}^1$. В первом случае получим меру изменения благосостояния, называемую эквивалентной вариацией (EV), а во втором — меру изменения благосостояния, называемую компенсирующей вариации (CV).

Определение 26.

Эквивалентная вариация — это такое изменение дохода, которое позволяет в базовых ценах получить ту же полезность, что и после изменений:

$$v(\boldsymbol{p}^0, R^0 + \mathrm{EV}(\boldsymbol{p}^0, R^0, \boldsymbol{p}^1, R^1)) = v(\boldsymbol{p}^1, R^1).$$

Заметим, что $\mu(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1, R^1) = e(\boldsymbol{p}^0, v(\boldsymbol{p}^1, R^1))$ — доход, достаточный для того, чтобы при ценах $\boldsymbol{p}^0$ обеспечить данному потребителю такой же уровень полезности, как и в ситуации после изменений (т.е. при ценах ($\boldsymbol{p}^1$) и доходе R^1). Поэтому, если воспользоваться тождеством $v(\boldsymbol{p}, e(\boldsymbol{p}, U)) \equiv U$ можно дать эквивалентной вариации несколько другое определение:

$$\mathrm{EV}(\boldsymbol{p}^0, R^0, \boldsymbol{p}^1, R^1) = e(\boldsymbol{p}^0, v(\boldsymbol{p}^1, R^1)) - R^0.$$

Таким образом, можно определить эквивалентную вариацию в терминах непрямой функции полезности, измеренной в деньгах при $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}^0$:

$$\mathrm{EV}(\boldsymbol{p}^0, R^0, \boldsymbol{p}^1, R^1) = \mu(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1, R^1) - R^0 = \mu(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1, R^1) - \mu(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^0, R^0).$$

Определение 27.

Компенсирующая вариация — это такое изменение дохода, которое позволяет в новых ценах достигнуть уровень полезности старой ситуации:

$$v(\boldsymbol{p}^0, R^0) = v(\boldsymbol{p}^1, R^1 - \mathrm{CV}(\boldsymbol{p}^0, R^0, \boldsymbol{p}^1, R^1)).$$

По определению денежной непрямой функции полезности $\mu(\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^0, R^0) = e(\boldsymbol{p}^1, v(\boldsymbol{p}^0, R^0))$ — доход, достаточный для того, чтобы при ценах $\boldsymbol{p}^1$ обеспечить данному потребителю такой же уровень полезности, как и в ситуации до изменений (т.е. при ценах $\boldsymbol{p}^0$ и доходе R^0). Поэтому компенсирующую вариацию можно выразить в терминах денежной непрямой функции полезности при $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}^1$:

$$\mathrm{CV}(\boldsymbol{p}^0, R^0, \boldsymbol{p}^1, R^1) = R^1 - e(\boldsymbol{p}^1, v(\boldsymbol{p}^0, R^0)) = R^1 - \mu(\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^0, R^0) =$$
$$= \mu(\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^1, R^1) - \mu(\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^0, R^0).$$

Рассмотрим соотношение между этими мерами в простом случае, когда изменяется только цена одного блага (случай, который интересует нас при анализе последствий налогообложения).

$$R^0 = R^1 = R,\ p_1^0 > p_1^1,\ p_2^0 = p_2^1, \dots p_n^0 = p_n^1.$$

Обозначим $u^0 = v(\boldsymbol{p}^0, R^0)$, $u^1 = v(\boldsymbol{p}^1, R^1)$. Очевидно, что $u^0 \leqslant u^1$.

$$\mathrm{EV}(\boldsymbol{p}^0, R^0, \boldsymbol{p}^1, R^0) = \mathrm{EV}(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1) = e(\boldsymbol{p}^0, v(\boldsymbol{p}^1, R^1)) - R = e(\boldsymbol{p}^0, u^1) - R.$$

Аналогично

$$\mathrm{CV}(\boldsymbol{p}^0, R^0, \boldsymbol{p}^1, R^0) = \mathrm{CV}(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1) = R^1 - e(\boldsymbol{p}^1, v(\boldsymbol{p}^0, R)) = R - e(\boldsymbol{p}^1, u^0).$$

Поскольку меняется только цена первого блага, не будем в дальнейшем указывать остальные цены и доход в качестве аргументов соответствующих функций.

Следующий рисунок предлагает графическую иллюстрацию для эквивалентной и компенсирующей вариаций в случае двух благ, когда цена второго блага равна единице ($p_2^0 = p_2^1 = 1$).

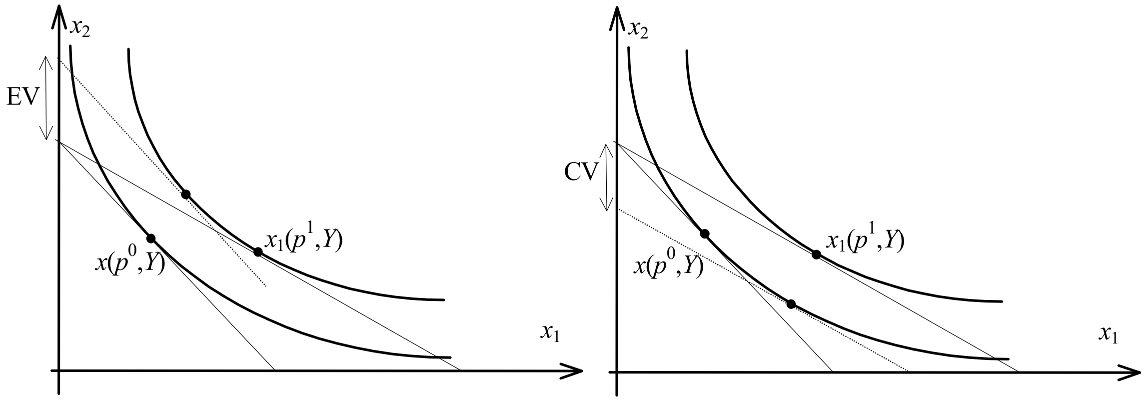


Рисунок 6. Эквивалентная и компенсирующая вариация при $R_0 = R_1 = R$, $p_1^0 > p_1^1$, $p_2^0 = p_2^1 = 1$

Поскольку $\dfrac{\partial e}{\partial p_i}(\boldsymbol{p},\ u^1) = h_i(\boldsymbol{p},\ u^1)$ (лемма Шепарда для теории потребления), мы можем записать:

$$\frac{\partial \mathrm{EV}}{\partial p_1^0}(p_1, p_1^1) = h_1(p_1, u^1), \qquad \frac{\partial \mathrm{CV}}{\partial p_1^1}(p_1^0, p_1) = -\, h_1(p_1, u^0).$$

Проинтегрируем эти равенства от p_1^0 до p_1^1:

$$\int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(t, u^1)dt = \int_{p_1^1}^{p_1^0} \frac{\partial \mathrm{EV}}{\partial p_1^0}(t, p_1^1)dt = \mathrm{EV}(p_1^0, p_1^1) - \mathrm{EV}(p_1^1, p_1^1) = \mathrm{EV}(p_1^0, p_1^1),$$

$$\int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(t, u^0)dt = -\int_{p_1^1}^{p_1^0} \frac{\partial \mathrm{CV}}{\partial p_1^1}(\, p_1^0, t)dt = \mathrm{CV}(p_1^0, p_1^1) - \mathrm{CV}(p_1^0, p_1^0) = \mathrm{CV}(p_1^0, p_1^1).$$

Таким образом,

$$\mathrm{EV}(p_1^0, p_1^1) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(t, u^1)dt, \qquad \mathrm{CV}(p_1^0, p_1^1) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(t, u^0)dt.$$

Как известно, изменение потребительского излишка вычисляется по формуле

$$\Delta \mathrm{CS}(p_1^0, p_1^1) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1(t)dt.$$

В данном случае все три величины положительны:

$$\mathrm{EV}(p_1^0, p_1^1) > 0, \qquad \mathrm{CV}(p_1^0, p_1^1) > 0, \qquad \Delta \mathrm{CS}(p_1^0, p_1^1) > 0.$$

Если эффект дохода неотрицателен (рассматриваемое благо — нормальное), то

$$h_1(p_1, u^0) \leqslant x_1\,(p_1) \leqslant\ h_1(p_1, u^1) \text{ при } p_1^1 \leqslant p_1 \leqslant p_1^0.$$

Эти неравенства (в случае двух благ) иллюстрируется следующим рисунком.

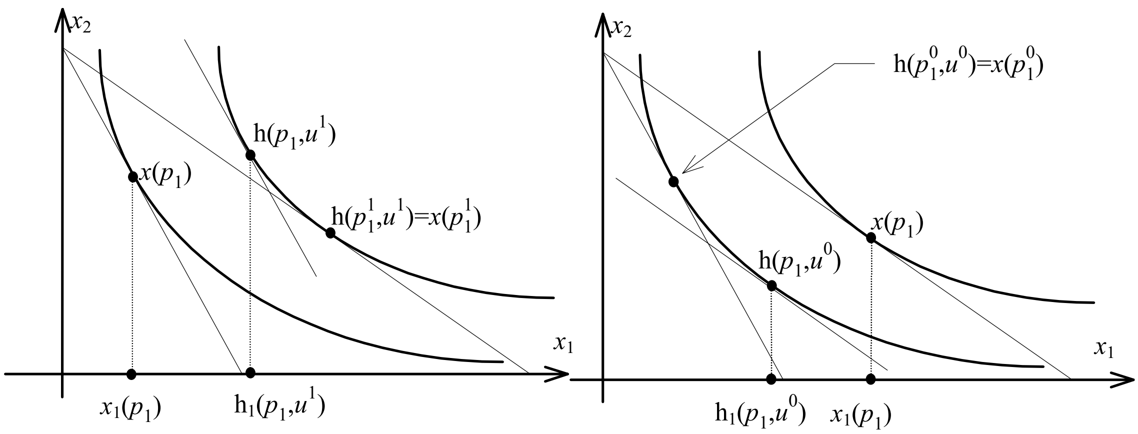


Рисунок 7

Докажем эти неравенства формально. Положительность эффекта дохода означает, что при увеличении дохода спрос на благо увеличивается ($\dfrac{\partial x_1}{\partial R} > 0$).

В разложении Слуцкого

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_1}(p_1,u^0) = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}(p_1, e(p_1,u^0)) + x_1(p_1, e(p_1,u^0))\,\frac{\partial x_1}{\partial R}(p_1, e(p_1,u^0))$$

в этом случае $x_1(p_1, e(p_1,u^0))\,\dfrac{\partial x_1}{\partial R}(p_1, e(p_1,u^0)) > 0$. Поэтому

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_1}(p_1,u^0) > \frac{\partial x_1}{\partial p_1}(p_1, e(p_1,u^0)) = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}(p_1),$$

и

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_1}(p_1,u^1) > \frac{\partial x_1}{\partial p_1}(p_1, e(p_1,u^1)) = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}(p_1, R) = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}(p_1).$$

Проинтегрируем эти неравенства. Неравенство сохраняется, если нижний предел интегрирования меньше верхнего.

Первое неравенство интегрируем от p_1 до p_1^0 при $p_1^0 > p_1$:

$$h_1(p_1^0,u^0) - h_1(p_1,u^0) = \int_{p_1}^{p_1^0} \frac{\partial h_1}{\partial p_1}(t,u^0)dt > \int_{p_1}^{p_1^0} \frac{\partial x_1}{\partial p_1}(t)dt = x_1(p_1^0) - x_1(p_1),$$

Поскольку $h_1(p_1^0,u^0) = x_1(p_1^0)$, то $h_1(p_1,u^0) < x_1(p_1)$.

Второе неравенство интегрируем от p_1^1 до p_1 при $p_1 > p_1^1$:

$$h_1(p_1,u^1) - h_1(p_1^1,u^1) = \int_{p_1^1}^{p_1} \frac{\partial h_1}{\partial p_1}(t,u^1)dt > \int_{p_1^1}^{p_1} \frac{\partial x_1}{\partial p_1}(t)dt = x_1(p_1) - x_1(p_1^1),$$

Поскольку $h_1(p_1^1,u^1) = x_1(p_1^1)$, то $x_1(p_1) < h_1(p_1,u^1)$.

Отсюда получим требуемое неравенство $h_1(p_1,u^0) \leqslant x_1(p_1) \leqslant h_1(p_1,u^1)$. Неравенство везде строгое, кроме двух крайних точек.

Интегрируя это неравенство от p_1^1 до p_1^0, получаем, что имеет место соотношение

$$\mathrm{EV}(p_1^0, p_1^1) < \Delta\mathrm{CS}(p_1^0, p_1^1) < \mathrm{CV}(p_1^0, p_1^1).$$

Следующий рисунок иллюстрирует это соотношение.

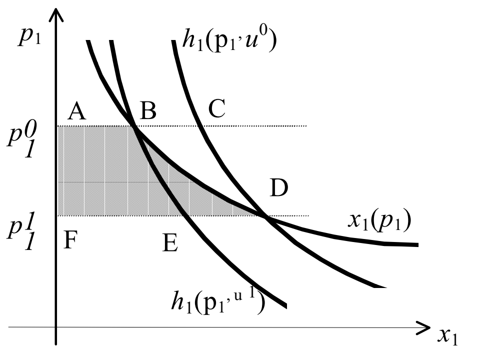


Рисунок 8. Связь между потребительским излишком и эквивалентной и компенсирующей вариацией

Здесь $\mathrm{CV} = S(ACDF)$,

$\Delta\mathrm{CS} = S(ABDF)$ (заштрихованная область),

$\mathrm{EV} = S(ABEF)$.

Предложенная диаграмма позволяет проиллюстрировать ситуацию с квазилинейными предпочтениями, когда компенсирующая вариация совпадает с эквивалентной. В этом случае отсутствует эффект дохода отсутствует ($\dfrac{\partial x_1}{\partial R} = 0$). Тогда из уравнения Слуцкого получаем, что

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},u^0) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},R) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p},u^1)$$

и следовательно,

$$\mathrm{CV}(p_1^0, p_1^1) = \Delta\mathrm{CS}(p_1^0, p_1^1) = \mathrm{EV}(p_1^0, p_1^1).$$

Таким образом, все три кривые спроса, изображенные на диаграмме, совпадают; следовательно, совпадают и три меры благосостояния.

Вообще говоря, полезности разных потребителей не сравнимы друг с другом, и их бессмысленно складывать. Однако на основе денежных мер изменения благосостояния можно получать некоторые оценки мероприятий экономической политики.

Предположим, что существуют n потребителей с функциями полезности $u_i(\boldsymbol{x}_i)$ и доходами R_i. Пусть цены изменились с $\boldsymbol{p}^0$ до $\boldsymbol{p}^1$. Пусть, кроме того, в результате этого изменения цен суммарная величина компенсирующей вариации положительна, т.е.

$$\sum_i \mathrm{CV}_i(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}^1, R_i) > 0.$$

Покажем, что существует такое перераспределение доходов $\{R_i'\}$ ($\sum_i R_i' \leqslant \sum_i R_i$), что

$$v_i(\boldsymbol{p}^1, R_i') > v_i(\boldsymbol{p}^0, R_i)\ \forall i,$$

то есть возможно компенсировать изменение цен каждому потребителю.

По определению компенсирующей вариации имеем, что

$$\mathrm{CV}_A = \sum_i \mathrm{CV}_i(\boldsymbol{p}^0, R_i, \boldsymbol{p}^1, R_i) = \sum_i (R_i - e_i(\boldsymbol{p}^1, v_i(\boldsymbol{p}^0, R_i))) > 0$$

Мы можем выбрать R_i' так, что $R_i' > e_i(\boldsymbol{p}^1, v_i(\boldsymbol{p}^0, R_i))$ (достаточно взять $R_i' = e_i(\boldsymbol{p}^1, v_i(\boldsymbol{p}^0, R_i)) + \mathrm{CV_A}/\, n$). Покажем, что в этом случае $v_i(\boldsymbol{p}^1, R_i') > v_i(\boldsymbol{p}^0, R_i)$.

Воспользовавшись возрастанием непрямой функции полезности по доходу и свойством двойственности между $v_i(.,.)$ и $e_i(.,.)$, получим

$$v_i(\boldsymbol{p}^1, R_i') > v_i(\boldsymbol{p}^1, e_i(\boldsymbol{p}^1, v_i(\boldsymbol{p}^0, R_i))) = v_i(\boldsymbol{p}^0, R_i).$$

Это можно интерпретировать следующим образом: мероприятие экономической политики, характеризующееся положительной суммарной компенсирующей вариацией, может привести к росту полезности всех затронутых потребителей, если дополнить его соответствующим перераспределением дохода. Однако следует отметить, что данная интерпретация предполагает, что такое перераспределение доходов не вызовет изменения цен. В рамках концепции общего равновесия приведенные рассуждения оказываются некорректными.

Тесты и задачи для самостоятельного решения

1. Какое из нижеприведенных выражений верно
- ♦ $\mathrm{CV} = e(\boldsymbol{p}_0, u^1) - R$
- ♦ $\mathrm{EV} = e(\boldsymbol{p}_0, u^1) - R$
- ♦ $\mathrm{CS} = e(\boldsymbol{p}_0, u^1) - R$

2. Какое из нижеприведенных выражений верно
- ♦ $\mathrm{EV} = R - e(\boldsymbol{p}_1, u^0)$
- ♦ $\mathrm{CV} = R - e(\boldsymbol{p}_1, u^0)$
- ♦ $\mathrm{CS} = R - e(\boldsymbol{p}_1, u^0)$

3. Какое из нижеприведенных выражений является определением эквивалентной вариации
- ♦ $\nu(\boldsymbol{p}_1+\mathrm{EV}, R_1) = \nu(\boldsymbol{p}_2, R_1)$
- ♦ $\nu(\boldsymbol{p}_1, R_1) = \nu(\boldsymbol{p}_2, R_1+\mathrm{EV})$
- ♦ $\nu(\boldsymbol{p}_1, R_1-\mathrm{EV}) = \nu(\boldsymbol{p}_2, R_1)$

4. Какое из нижеприведенных выражений является определением компенсирующей вариации
- ♦ $\nu(\boldsymbol{p}_1, R_1) = \nu(\boldsymbol{p}_2, R_1+\mathrm{CV})$
- ♦ $\nu(\boldsymbol{p}_1, R_1-\mathrm{CV}) = \nu(\boldsymbol{p}_2, R_1+\mathrm{EV})$
- ♦ $\nu(\boldsymbol{p}_1-\mathrm{CV}, R_1) = \nu(\boldsymbol{p}_2+\mathrm{CV}, R_1)$

5. Пусть цена одного из товаров возросла, в то время как цены остальных товаров остались неизменными. Если этот товар не является малоценным, то
- ♦ $\mathrm{CV} \leqslant \mathrm{CS} \leqslant \mathrm{EV}$
- ♦ $\mathrm{EV} \leqslant \mathrm{CS} \leqslant \mathrm{CV}$
- ♦ $\mathrm{CV} = \mathrm{CS} = \mathrm{EV}$

6. Пусть цена одного из товаров возросла, в то время как цены остальных товаров остались неизменными. Если этот товар является малоценным, то

- ♦ CV ⩽ CS ⩽ EV
- ♦ EV ⩽ CS ⩽ CV
- ♦ CV = CS = EV

7. Пусть цена одного из товаров возросла, в то время как цены остальных товаров остались неизменными. Если кроме того отсутствует эффект дохода, то

- ♦ CV ⩽ CS ⩽ EV
- ♦ EV ⩽ CS ⩽ CV
- ♦ CV = CS = EV

8. Пусть цена одного из товаров возросла, в то время как цены остальных товаров остались неизменными. Если кроме того функция полезности квазилинейна и этот товар входит в нее нелинейно, то

- ♦ CV ⩽ CS ⩽ EV
- ♦ EV ⩽ CS ⩽ CV
- ♦ CV = CS = EV

9. В каком случае при изменении цены только одного блага можно гарантировать, что эквивалентная вариация совпадает с компенсирующей

- ♦ При квазилинейных предпочтениях
- ♦ Если функция полезности выпукла
- ♦ Если блага комплементарные

10. В каком случае при изменении цены только одного блага можно гарантировать, что эквивалентная вариация совпадает с потребительским излишком

- ♦ При квазилинейных предпочтениях
- ♦ Если функция полезности выпукла
- ♦ Если функция полезности вогнута

11. В каком случае при изменении цены только одного блага можно гарантировать, что компенсирующая вариация совпадает с потребительским излишком

- ♦ При квазилинейных предпочтениях
- ♦ Если функция полезности линейна (совершенно заменимые блага)
- ♦ Если блага комплементарные

12. Что вы можете сказать о соотношении эквивалентной и компенсирующей вариаций при изменении цены только одного блага, если хиксианский спрос на него совпадает с маршалианским?

- ♦ Эквивалентная вариация больше с компенсирующей
- ♦ Эквивалентная вариация меньше с компенсирующей
- ♦ Эквивалентная вариация совпадает с компенсирующей

13. Что вы можете сказать о соотношении эквивалентной вариации и потребительского излишка при изменении цены только одного блага, если хиксианский спрос на него совпадает с маршалианским?

♦ Эквивалентная вариация совпадает с потребительским излишком

♦ Эквивалентная вариация больше потребительского излишка

♦ Эквивалентная вариация меньше потребительского излишка

14. Пусть функция спроса на благо линейна и зависит только от его цены и имеет вид $D(p)=20-2p$. Известно, что цена на него повышается с 2 до 3 денежных единиц, тогда потребительский излишек равен

♦ –15

♦ 15

♦ 0

15. Что вы можете сказать о соотношении компенсирующей вариации и потребительского излишка при изменении цены только одного блага, если хиксианский спрос на него совпадает с маршалианским?

♦ Компенсирующая вариация совпадает с потребительским излишком

♦ Компенсирующая вариация больше потребительского излишка

♦ Компенсирующая вариация меньше потребительского излишка

16. В каком случае при изменении цены одного блага можно гарантировать, что компенсирующая вариация совпадает с потребительским излишком?

17. Что вы можете сказать о соотношении эквивалентной и компенсирующей вариаций при изменении цены только одного блага, если хиксианский спрос на него совпадает с маршалианским?

18. Что вы можете сказать о соотношении эквивалентной вариации и потребительского излишка при изменении цены только одного блага, если хиксианский спрос на него совпадает с маршалианским?

19. Что вы можете сказать о соотношении компенсирующей вариации и потребительского излишка при изменении цены только одного блага, если хиксианский спрос на него совпадает с маршалианским?

20. Постройте пример, в котором потребительский излишек не является корректной мерой изменения благосостояния при изменении цен. (Подсказка: рассмотрите случай, когда изменяются цены сразу нескольких благ.)

21. Функция полезности Петрова $U(x) = \min\{x, y\}$. Его доход – 150 д.е., цена первого и второго блага – 1 д.е. Его шефы предлагает ему работу без повышения заработной платы в филиале фирмы в другом городе, где цена первого блага такая же, а цены второго в два раза выше. Петров еще в университете познакомился с поняти-

ем компенсирующей и эквивалентной вариации. Оценив предложение, он ответил, что в принципе он не против, но переезд для него означал бы потерю в доходе в А рублей. Но он готов принять предложение, если его зарплата возрастет на В рублей. Чему равно А и В?

22. Функция полезности Петрова $U(x) = xy$. Его доход — 100 д.е., цена первого и второго блага — 1 д.е. Его шефы предлагает ему работу без повышения заработной платы в филиале фирмы в другом городе, где цена первого блага такая же, а цены второго в два раза выше. Петров еще в университете познакомился с понятием компенсирующей и эквивалентной вариации. Оценив предложение, он ответил, что в принципе он не против, но переезд для него означал бы потерю в доходе в А рублей. Но он готов принять предложение, если его зарплата возрастет на В рублей. Чему равно А и В?

23. Покажите, что чистые потери от количественного налога на благо измеряется величиной $-\mathrm{EV} - T$, где EV — эквивалентная вариация, связанная с соответствующим увеличением цены блага, а T — поступление от налога.

24. Предположим, что цена на все блага, кроме первого, постоянна. Покажите, что если эластичность маршалианского спроса по доходу на первое благо постоянна, то компенсирующая вариация является функций этой эластичности, дохода и потребительного излишка следующего вида:

$$\mathrm{CV} = R^1\left[1 + \frac{1-\eta}{R^1}\Delta\mathrm{CS}\right]^{\frac{1}{1-\eta}} - R^1$$

где $\Delta\mathrm{CS} = \int_{p_1^1}^{p_1^2} x_1(\boldsymbol{p}, R^1)\,\mathrm{d}p_1$ — изменение потребительского излишка.

25. Покажите, что если непрямая функция полезности имеет вид

$$v(\boldsymbol{p}, R) = a(\boldsymbol{p}) + b(\boldsymbol{p})R,$$

то компенсирующая вариация вычисляется по так называемой формуле Сида:

$$\mathrm{CV} = \int_{p^1}^{p^2} e^{-\int_{p^2}^{p}\frac{\partial x}{\partial R}(p', R^1)\mathrm{d}p'}\, x(\boldsymbol{p}, R^1)\,\mathrm{d}p.$$

Если к тому же эластичность по доходу η постоянна, то формула Сида имеет вид:

$$\mathrm{CV} = \frac{R^1}{\eta}\left[e^{\frac{\eta}{R^1}\Delta\mathrm{CS}} - 1\right].$$

С использованием этой формулы, докажите, что компенсирующая вариация и потребительский излишек равны в случае квазилинейных предпочтений.

26. Предположим, что первое благо доступно лишь в дискретных количествах, а второе благо — деньги (используемые на приобретение других благ), и функция полезности квазилинейна:

$$u(\boldsymbol{x}) = v(x^1) + x^2.$$

Пусть, далее, r^i – резервная цена приобретения i-ой единицы первого блага и определяется соотношением

$$u(i–1, x^2 – (i–1)r^i) = u(i, x^2 – ir^i).$$

(a) Покажите, что если потребитель приобретает n единиц первого блага, то цена p^1 на него удовлетворяет соотношению:

$$r_n \geqslant p^1 \geqslant r_{n–1}.$$

При каких условиях верно и обратное утверждение?
(в) Покажите, что если $v(0) = 0$, то $v(n) = \sum_i r_i$, а потребительский излишек

$$\mathrm{CS} = v(n) + R – p^1 n$$

совпадает с “чистой” выгодой от приобретения первого блага
(c) Покажите, что потребительский излишек совпадает с суммой компенсации, при которой потребитель готов полностью отказаться от потребления первого блага, (увеличив тем самым потребление второго блага на величину компенсации).

27. Пусть предпочтения представимы функцией полезности Кобба-Дугласа. Сформулируйте определение компенсирующей, эквивалентной вариаций и потребительского излишка непосредственно в терминах функции спроса и функции полезности и вычислите на этой основе их величины при $l = 2$, $R^0 = R^1 = 100$, $p^0 = (1,1)$, $p^1 = (2,1)$.

28. В каком случае при изменении цены только одного блага можно гарантировать, что эквивалентная вариация совпадает с компенсирующей?

29. В каком случае при изменении цены только одного блага можно гарантировать, что эквивалентная вариация совпадает с потребительским излишком?

30. Сформулируйте определение компенсирующей, эквивалентной вариаций и потребительского излишка непосредственно в терминах функции спроса и функции полезности и вычислите на этой основе их величины при ($l = 2$, $R^0 = R^1 = 100$, $p^0 = (1,1)$, $p^1 = (2,1)$), когда...
(a) предпочтения представимы квазилинейной функцией полезности;
(b) блага абсолютно заменимы;
(c) блага комплементарны.

31. В условиях упражнения 30 проделайте аналогичные вычисления для случая, когда цена на первое благо падает ($l = 2$, $R^0 = R^1 = 100$, $p^0 = (2,1)$, $p^1 = (1,1)$).
Сравните результаты вычислений этого и предыдущего упражнений и объясните различия.

32. Проиллюстрируйте на графике при условиях $l = 2$, $R^0 = R^1 = \text{const}$, $p_2 = \text{const}$ поведение кривых спроса (на первое благо) Хикса и Маршалла, и укажите соответ-

ствующие фигуры, площади которых измеряют компенсирующую, эквивалентную вариацию и потребительский излишек когда
(а) предпочтения представимы функцией полезности Кобба-Дугласа;
(а) предпочтения представимы квазилинейной функцией полезности;
(а) блага вполне заменимы;
(а) блага комплементарны
в случае (I) падения и (II) роста цены первого блага.

33. Пусть $l = 2$, $p_2 = \text{const}$. Для заданной на плоскости $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ системы кривых спроса Хикса на первое благо изобразите
(а) возможное положение кривых спроса Маршалла на это благо;
(в) соответствующие компенсирующую, эквивалентную вариацию и потребительский излишек при (I) падении и (II) росте цены первого блага.
(с) Каковы соотношения между величинами компенсирующей, эквивалентной вариаций и потребительского излишка в разных ситуациях, различающихся типом благ (нормальное-малоценное благо) и характером изменения цен (падение-рост).

1. Теория производителя

1.1. Технологическое множество и его свойства

Рассмотрим экономику с l благами. Для конкретной фирмы естественно рассматривать часть из этих товаров как факторы производства и часть — как выпускаемую продукцию. Следует оговориться, что такое деление довольно условно, так как фирма обладает достаточной свободой в выборе ассортимента производимой продукции и структуры затрат. При описании технологии будем различить выпуск и затраты, представляя последние как выпуск со знаком минус. Для удобства представления технологии продукцию, которая и не затрачивается и не выпускается фирмой, будем относить к ее выпуску, причем объем производства этой продукции считаем равным 0. В принципе не исключена ситуация, в которой продукт производимый фирмой также потребляется ею в процессе производства. В этом случае мы будем рассматривать только чистый выпуск данного продукта, т.е. его выпуск минус затраты.

Пусть число факторов производства равно n, а число видов выпускаемой продукции равно m (отметим, что $l = m + n$). Обозначим вектор затрат (по абсолютной величине) через $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+$, а объемы выпусков через $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m_+$. Вектор $(-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ будем называть **вектором чистых выпусков**. Совокупность всех технологически допустимых векторов чистых выпусков $\boldsymbol{z} = (-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ составляет **технологическое множество** Z. Таким образом, в рассматриваемом случае любое технологическое множество — это подмножество $\mathbb{R}^n_- \times \mathbb{R}^m_+$.

Такое описание производства носит общий характер. При этом можно не придерживаться жесткого деления благ на продукты и факторы производства: одно и то же благо может при одной технологии затрачиваться, а при другой — производится. В этом случае $Z \subseteq \mathbb{R}^l$.

Опишем свойства технологических множеств, в терминах которых обычно дается описание конкретных классов технологий.

1. Непустота

Технологическое множество Z непусто.

Это свойство означает принципиальную возможность осуществления производственной деятельности.

2. Замкнутость

Технологическое множество Z замкнуто.

Это свойство скорее техническое; оно означает, что технологическое множество содержит свою границу, и предел любой последовательности технологически допустимых векторов чистого выпуска также является технологически допустимым вектором чистых выпусков.

3. Свобода расходования:

$$\text{если } \boldsymbol{z} \in Z \text{ и } \boldsymbol{z}' \leqslant \boldsymbol{z}, \text{ то } \boldsymbol{z}' \in Z.$$

Это свойство можно интерпретировать как наличие возможности производить тот же самый объем выпуска, но посредством больших затрат, или меньший выпуск при тех же затратах.

4. Отсутствие «рога изобилия» (“no free lunch”)

$$z \in Z \text{ и } z \geqslant 0 \Rightarrow z = 0$$

Это свойство означает что для производства продукции в положительном количестве необходимы затраты в ненулевом объеме.

5. Невозрастающая отдача от масштаба:

$$\text{если } z \in Z \text{ и } z' = \lambda z, \text{ где } 0<\lambda<1, \text{ тогда } z' \in Z.$$

Иногда это свойство называют (не совсем точно) убывающей отдачей от масштаба. В случае двух благ, когда одно затрачивается, а другое производится, убывающая отдача означает, что (максимально возможная) средняя производительность затрачиваемого фактора не возрастает. Если за час вы можете решить в лучшем случае 5 однотипных задач по микроэкономике, то за два часа в условиях убывающей отдачи вы не смогли бы решить более 10 таких задач.

5′. Неубывающая отдача от масштаба:

$$\text{если } z \in Z \text{ и } z' = \lambda z, \text{ где } \lambda>1, \text{ тогда } z' \in Z.$$

В случае двух товаров, когда один затрачивается, а другой производится, возрастающая отдача означает, что (максимально возможная) средняя производительность затрачиваемого фактора не убывает.

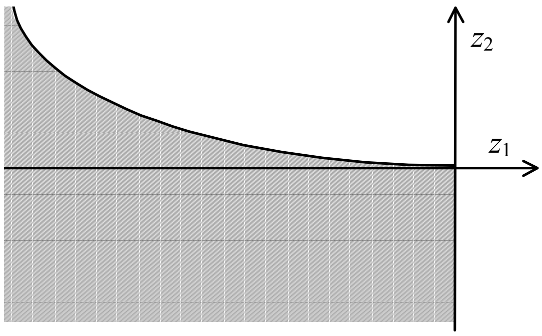


Рисунок 1. Технологическое множество с возрастающей отдачей от масштаба.

5″. Постоянная отдача от масштаба — ситуация, когда технологической множества удовлетворяет условиям 5 и 5′ одновременно, т.е.

$$\text{если } z \in Z \text{ и } z' = \lambda z', \text{ тогда } z' \in Z\ \forall \lambda>0.$$

Геометрически постоянная отдача от масштаба означает, что Z является конусом (возможно, не содержащим **0**) .

В случае двух товаров, когда один затрачивается, а другой производится, постоянная отдача означает, что средняя производительность затрачиваемого фактора не меняется при изменении объема производства.

6. Выпуклость:

$$\text{если } z', z'' \in Z \text{ и } 0<\alpha\leqslant 1, \text{ то } \alpha z' + (1-\alpha) z'' \in Z.$$

Свойство выпуклости означает возможность «смешивать» технологии в любой пропорции.

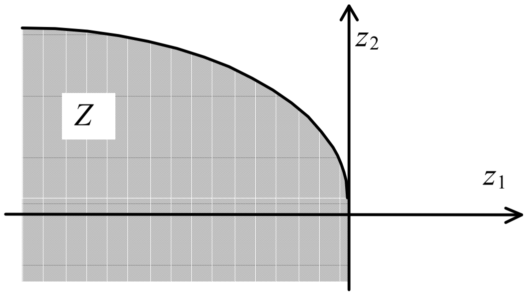


Рисунок 2. Выпуклое технологическое множество с убывающей отдачей от масштаба.

7. Необратимость

$$z \in Z \text{ и } z \neq 0 \Rightarrow (-z) \notin Z.$$

Пусть из килограмма стали можно произвести 5 подшипников. Необратимость означает, что невозможно произвести из 5-ти подшипников килограмм стали.

8. Аддитивность

$$z \in Z \text{ и } \bar{z} \in Z \Rightarrow z + \bar{z} \in Z.$$

Свойство аддитивности означает возможность комбинировать технологии.

9. Допустимость бездеятельности:

$$\mathbf{0} \in Z.$$

Утверждение 1.

1) Из невозрастающей отдачи от масштаба и аддитивности следует выпуклость.

2) Из выпуклости и допустимости бездеятельности следует невозрастающая отдача от масштаба. (Обратное не всегда верно: при невозрастающей отдаче технология может быть невыпуклой (см. Рис. 3).)

3) Множество Z обладает свойствами аддитивности и невозрастающей отдачи от масштаба тогда и только тогда, когда оно — выпуклый конус.

Доказательство:

Доказательство оставляется в качестве упражнения.

■

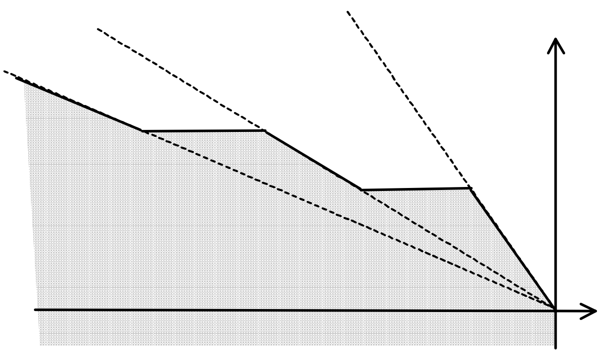


Рисунок 3. Невыпуклое технологическое множество с невозрастающей отдачей от масштаба.

При описании поведения производителя удобно представлять его производственное множество посредством некоторой производственной функции. Отметим, однако, что здесь и далее мы будем говорить только об «однопродуктовых» технологиях, т.е. $m = 1$.

Пусть X — проекция технологического множества Z на пространство векторов затрат, т.е.

$$X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, y \in \mathbb{R}\colon (-\boldsymbol{x}, y) \in Z\}.$$

Определение 1. Функция $f(.)$: $X \mapsto \mathbb{R}$, называется производственной функцией, представляющей технологию Z, если при каждом $\boldsymbol{x} \in X$ число $f(\boldsymbol{x})$ является значением следующей задачи:

$$y \to \max_y$$
$$(-\boldsymbol{x}, y) \in Z.$$

Утверждение 2.

Пусть для технологического множества $Z \subseteq (-X) \times \mathbb{R}$ для любого $\boldsymbol{x} \in X$ множество

$$F(\boldsymbol{x}) = \{y \mid (-\boldsymbol{x}, y) \in Z\}$$

замкнуто и ограничено сверху. Тогда технологическое множество Z может быть представлено производственной функцией.

Доказательство:

Замкнутость и ограниченность сверху множества $F(\boldsymbol{x})$ гарантируют, что существует $f(\boldsymbol{x}) \in F(\boldsymbol{x})$, такой что $f(\boldsymbol{x}) \geqslant y\ \forall y \in F(\boldsymbol{x})$.

■

Замечание. Выполнение условий данного утверждения можно гарантировать, например, если множество Z замкнуто и обладает свойствами невозрастающей отдачи от масштаба и отсутствия рога изобилия.

Утверждение 3.

Пусть множество Z замкнуто и обладает свойствами невозрастающей отдачи от масштаба и отсутствия рога изобилия. Тогда для любого $\boldsymbol{x} \in X$ множество

$$F(\boldsymbol{x}) = \{y \mid (-\boldsymbol{x}, y) \in Z\}$$

замкнуто и ограничено сверху.

Доказательство:

Замкнутость множеств $F(\boldsymbol{x})$ непосредственно следует из замкнутости Z.

Покажем, что $F(\boldsymbol{x})$ ограничены сверху. Пусть это не так и при некотором $\boldsymbol{x} \in X$ существует неограниченно возрастающая последовательность $\{y_N\}$, такая что $y_N \in F(\boldsymbol{x})$. Тогда вследствие невозрастающей отдачи от масштаба $(-\boldsymbol{x}/y_N, 1) \in Z$. Поэтому (вследствие замкнутости), $(\boldsymbol{0}, 1) \in Z$, что противоречит отсутствию рога изобилия.

■

Отметим также, что если технологическое множество Z удовлетворяет гипотезе свободного расходования и существует представляющая его производственная функция $f(.)$, то , множество Z описывается следующим соотношением:

$$Z = \{(-\boldsymbol{x}, y) | \, y \leqslant f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in X\}.$$

Заметим, что если технологическое множество имеет вид

$$Z = \{(-x_1, -x_2, \; y) \in \mathbb{R}^3 \, | \, y \leqslant x_1{}^{\alpha} x_2{}^{\beta}\},$$

то представляющая его производственная функция существует и является функцией Кобба-Дугласа $f(\boldsymbol{x}) = x_1{}^{\alpha} x_2{}^{\beta}$

Этот пример показывает, что приведенные выше условия, гарантирующие существование производственной функции, не являются необходимыми.

Установим теперь некоторые взаимосвязи между свойствами технологического множества и представляющей его производственной функции.

Утверждение 4.

Пусть технологическое множество Z представляется производственной функцией $f(.)$. Тогда верно следующее

1) Если множество Z выпукло, то функция $f(.)$ вогнута.
2) Если множество Z удовлетворяет гипотезе свободного расходования, то верно и обратное, т.е. если функция $f(.)$ вогнута, то множество Z выпукло.
3) Если Z выпукло, то $f(.)$ непрерывна на внутренности множества X.
4) Если множество Z обладает свойством свободы расходования, то функция $f(.)$ не убывает.
5) Если Z обладает свойством отсутствия рога изобилия, то $f(\mathbf{0}) \leqslant 0$.
6) Если множество Z обладает свойством допустимости бездеятельности, то $f(\mathbf{0}) \geqslant 0$.

Доказательство:

(1) Пусть $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X$. Тогда $(-\boldsymbol{x}_1, f(\boldsymbol{x}_1)) \in Z$ и $(-\boldsymbol{x}_2, f(\boldsymbol{x}_2)) \in Z$, и $(-\alpha\boldsymbol{x}_1-(1-\alpha)\boldsymbol{x}_2, \alpha f(\boldsymbol{x}_1) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{x}_2)) \in Z$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ поскольку множество Z выпукло. Тогда по определению производственной функции

$$\alpha f(\boldsymbol{x}_1) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{x}_2) \leqslant f(\alpha \boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2),$$

что означает вогнутость $f(\boldsymbol{x})$.

(2) Поскольку множество Z обладает свойством свободного расходования, то множество Z (с точностью до знака вектора затрат) совпадает с ее подграфиком. А подграфик вогнутой функции — выпуклое множество.

(3) Доказываемый факт следует из того, что вогнутая функция непрерывна во внутренности ее области определения.

(4) Пусть $\boldsymbol{x}_2 \geqslant \boldsymbol{x}_1$ $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^n_+)$. Поскольку $(-\boldsymbol{x}_1, f(\boldsymbol{x}_1)) \in Z$, то по свойству свободы расходования $(-\boldsymbol{x}_2, f(\boldsymbol{x}_1)) \in Z$. Отсюда, по определению производственной функции, $f(\boldsymbol{x}_2) \geqslant f(\boldsymbol{x}_1)$, то есть $f(.)$ неубывает.

(5) Неравенство $f(\mathbf{0}) > 0$ противоречит предположению об отсутствии рога изобилия. Значит, $f(\mathbf{0}) \leqslant 0$.

(6) По предположению о допустимости бездеятельности $(\mathbf{0}, 0) \in Z$. Значит, по определению производственной функции, $f(\mathbf{0}) \geqslant 0$. ■

В предположении о существовании производственной функции свойства технологии можно описывать непосредственно в терминах этой функции. Покажем это на примере так называемой эластичности масштаба.

Пусть производственная функция дифференцируема. В точке $\boldsymbol{x}$, где $f(\boldsymbol{x})>0$, определим локальную эластичность масштаба $e(\boldsymbol{x})$ как:

$$e(\boldsymbol{x}) = \frac{df(\lambda \boldsymbol{x})}{d\lambda} \frac{\lambda}{f(\boldsymbol{x})}\bigg|_{\lambda = 1}.$$

Если в некоторой точке $e(\boldsymbol{x})$ равен 1, то считают, что в этой точке "постоянная эластичность масштаба", если больше 1 — то "растущая эластичность", меньше — "убывающая". Вышеприведенное определение можно переписать в следующем виде:

$$e(\boldsymbol{x}) = \frac{\sum \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} x_i}{f(\boldsymbol{x})}.$$

Утверждение 5.

Пусть технологическое множество Z описывается производственной функцией $f(.)$ и в точке $\boldsymbol{x}$ выполнено $f(\boldsymbol{x})>0$. Тогда верно следующее:

1) Если технологическое множество Z обладает свойством убывающей отдачи от масштаба, то $e(\boldsymbol{x}) \leqslant 1$.

2) Если технологическое множество Z обладает свойством возрастающей отдачи от масштаба, то $e(\boldsymbol{x}) \geqslant 1$.

3) Если Z обладает свойством постоянной отдачи от масштаба, то $e(\boldsymbol{x})=1$.

Доказательство:

(1) Рассмотрим последовательность $\{\lambda_n\}$ $(0<\lambda_n<1)$, такую что $\lambda_n \to 1$. Тогда $(-\lambda_n \boldsymbol{x}, \lambda_n f(\boldsymbol{x})) \in Z$, откуда следует, что $f(\lambda_n \boldsymbol{x}) \geqslant \lambda_n f(\boldsymbol{x})$. Перепишем это неравенство в виде:

$$\frac{f(\lambda_n \boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})}{\lambda_n - 1} \leqslant f(\boldsymbol{x}).$$

Переходя к пределу, имеем

$$\frac{df(\lambda \boldsymbol{x})}{d\lambda}\bigg|_{\lambda = 1} = \sum \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} x_i \leqslant f(\boldsymbol{x}).$$

Таким образом, $e(\boldsymbol{x}) \leqslant 1$.

(2) и (3) доказываются аналогично.

■

Тесты и задачи для самостоятельного решения

1. Пусть множество производственных возможностей фирмы задается условием:

$$z_1 \leqslant \ln(1 - z_2), \text{ где } z_2<1.$$

Какими свойствами обладает данная технология?

2. Докажите Утверждение **1**.

3. Технологические способы (–5,4), (–4,0) и (–2,2) принадлежат некоторому технологическому множеству $\boldsymbol{Z}$. Можно ли гарантировать, что технологический способ (–3,2) принадлежит $\boldsymbol{Z}$, если известно, что $\boldsymbol{Z}$ выпукло? Изобразите графически множество технологических способов, про которые можно утверждать, что они принадлежат $\boldsymbol{Z}$.

4. Технологические способы (–5,4), (–4,0) и (–2,2) принадлежат некоторому технологическому множеству $\boldsymbol{Z}$. Можно ли гарантировать, что технологический способ (–2,1) принадлежит $\boldsymbol{Z}$, если известно, что $\boldsymbol{Z}$ выпукло и характеризуется убывающей отдачей? Изобразите графически множество технологических способов, про которые можно утверждать, что они принадлежат $\boldsymbol{Z}$.

5. Технологические способы (–8,10), (–2,3) и (–4,2) принадлежат некоторому технологическому множеству $\boldsymbol{Z}$. Можно ли гарантировать, что технологический способ (–5, 5) принадлежит $\boldsymbol{Z}$, если известно, что $\boldsymbol{Z}$ характеризуется свободой расходования? Изобразите графически множество технологических способов, про которые можно утверждать, что они принадлежат $\boldsymbol{Z}$.

6. Пусть однопродуктовая технология может быть представлена производственной функцией. Показать, что производственное множество удовлетворяет свойству постоянной отдачи от масштаба тогда и только тогда, когда соответствующая производственная функция однородна первой степени.

7. Показать в случае технологии, что если производственное множество $\boldsymbol{Z}$ замкнуто и выпукло и $-\mathbb{R}^l_+ \subseteq \boldsymbol{Z}$, то оно обладает свойством свободы расходования.

1.2. Задача производителя и ее свойства

Гипотеза, лежащая в основе модели поведения производителя заключается в том, что производитель выбирает технологически допустимый вектор чистых выпусков, максимизирующий прибыль. В терминах чистых выпусков прибыль есть скалярное произведение вектора чистых выпусков $z \in Z$ на вектор цен: $\boldsymbol{pz}$. (Цены мы везде в дальнейшем будем считать строго положительными: $\boldsymbol{p} \gg \mathbf{0}$.) Таким образом, если производитель сталкивается с некоторым вектором цен $\boldsymbol{p}$, то его выбор оказывается решением следующей задачи математического программирования:

Задача 3.

$$\boldsymbol{pz} \to \max_{z \in Z}.$$

Существенное отличие задачи производителя (Задача 3) от задачи потребителя (Задачи 1) в том, что множество ее допустимых решений Z, как правило, не ограничено. Более того, для технологий с возрастающей отдачей, существование технологически допустимых пар с положительной прибылью приводит к существованию допустимых решений, дающих сколь угодно большую прибыль.

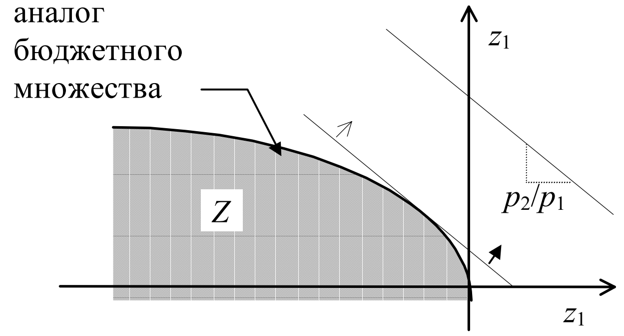


Рисунок 4. Иллюстрация решения задачи производителя

<u>Пример</u> (отсутствия решения):

Пусть технологическое множество имеет вид $Z = \{(z_1, z_2) \mid z_1 \leqslant 0, z_2 + \alpha z_1 \leqslant 0\}$, цены благ равны p_1, p_2. Если выбрать $z_2 = -\alpha z_1$, то прибыль будет равна $-(\alpha p_2 - p_1) z_1$. Поэтому если $\alpha p_2 > p_1$, то прибыль неограничена сверху, и решение отсутствует.

Если $\alpha p_2 < p_1$, то решение единственно — z_1=0 и z_2=0. Если $\alpha p_2 = p_1$, то решением этой задачи является любая технологически допустимая пара (z_1, z_2), такая что $z_2 + \alpha z_1 = 0$.

Таким образом, существование решений можно гарантировать лишь при дополнительных предположениях относительно структуры множества Z. Ниже мы докажем существование решения при следующем (сильном) предположении: существует компактное множество Z', такое что

$$Z' \subset Z \text{ и } \qquad Z \subset Z' - \mathbb{R}^k_+. \qquad (*)$$

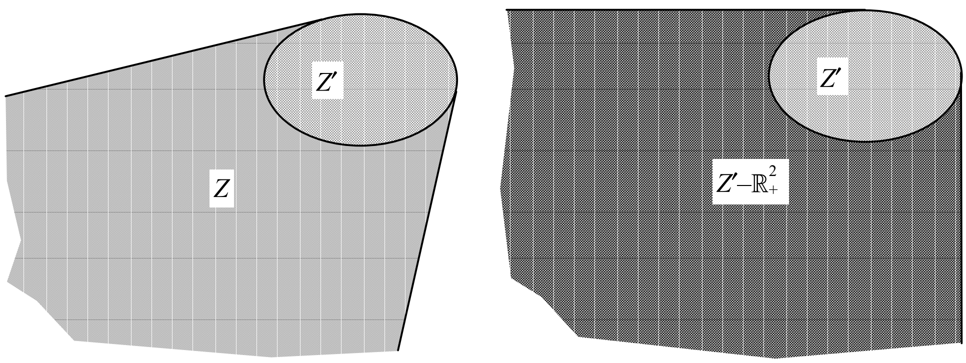


Рисунок 5. Иллюстрация предположения, гарантирующего существование решения задачи максимизации прибыли

Заметим (что легко увидеть из предлагаемых иллюстраций рис. 5), что множетво Z', обладающее указанным свойством, если существует, то определяется множеством Z не единственным образом.

Утверждение 6.

Пусть выполнено соотношение (*). Тогда решение Задачи 3 существует при любом положительном векторе цен благ.

<u>Доказательство</u>:

Докажем, что задача максимизации прибыли на Z сводится к задаче максимизации прибыли на Z'. Пусть $z \in Z$ и $z \notin Z'$. Тогда по условию (*) найдется вектор $z' \in Z'$ такой, что $z' - z \geqslant \neq 0$. Тем самым мы нашли допустимое решение, для которого прибыль больше, чем для z. Из этого следует, что нам достаточно рассматривать только $z \in Z'$.

Поскольку Z' — компактное множество, а прибыль $\boldsymbol{pz}$ непрерывна по z, то по теореме Вейерштрасса решение Задачи 3 на множестве Z' всегда существует.

■

Определение 2.

Пусть решение Задачи 3 существует и единственно для всех значений параметров — положительных цен $\boldsymbol{p}$. Тогда определена следующая функция, которая ставит в соответствие каждому вектору цен решение задачи при этих параметрах — вектор $z(\boldsymbol{p})$. Будем называть ее функцией предложения. Если решение задачи при некоторых значениях параметров неединственно, то говорят об отображении предложения.

Определение 3.

Функция прибыли есть максимум целевой функции в Задаче 3:

$$\pi(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}z(\boldsymbol{p}).$$

Функция прибыли $\pi(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}z(\boldsymbol{p})$ аналогична непрямой функции полезности потребителя, а функция предложения $z(\boldsymbol{p})$ — функции спроса. Докажем некоторые свойства этих функций.

Утверждение 7. (Свойства функции $\pi(\boldsymbol{p})$)

1) Функция $\pi(\boldsymbol{p})$ однородна 1-й степени:

$$\pi(\lambda\boldsymbol{p}) = \lambda\pi(\boldsymbol{p}).$$

2) Функция $\pi(\boldsymbol{p})$ выпукла.

3) Функция $\pi(\boldsymbol{p})$ непрерывна на множестве положительных цен.

<u>Доказательство</u>:

1) Доказательство однородности оставляем в качестве упражнения.

2) Докажем выпуклость $\pi(.)$.

Пусть от некоторых двух цен $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'$ взята выпуклая комбинация — цена

$$\boldsymbol{p}_\alpha = \alpha\boldsymbol{p} + (1-\alpha)\boldsymbol{p}' \quad (0 < \alpha < 1).$$

Выпуклость функции $\pi(.)$ означает, что $\pi(\boldsymbol{p}_\alpha) \leqslant \alpha\pi(\boldsymbol{p}) + (1-\alpha)\pi(\boldsymbol{p}')$.

Учитывая условия максимизации прибыли, имеем для $z_\alpha = z(\boldsymbol{p}_\alpha)$:

$$\boldsymbol{p}z_\alpha \leqslant \pi(\boldsymbol{p}),\ \boldsymbol{p}'z_\alpha \leqslant \pi(\boldsymbol{p}').$$

Складывая эти неравенства с множителями α и $(1-\alpha)$ соответственно, получим требуемое неравенство.

Выпуклость функции $\pi(.)$ можно также доказать, используя тот факт, что поточечный максимум семейства выпуклых функций — выпуклая функция, заметив, что $\pi(.)$ является поточечным максимумом выпуклых (линейных) функций $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z}\in Z$.

3) Непрерывность функции $\pi(.)$ на множестве положительных цен следует, например, из того факта, что выпуклая функция непрерывна во внутренности ее области определения (для положительных цен в данном случае).

■

Аналогом тождества Роя является следующая **лемма Хотелинга**.

Утверждение 8.
Пусть функция прибыли $\pi(.)$ непрерывно дифференцируема в точке $\boldsymbol{p}\gg\boldsymbol{0}$. Тогда

$$\frac{\partial\pi(\boldsymbol{p})}{\partial p_k} = z_k(\boldsymbol{p}).$$

<u>Доказательство</u>:

Пусть $\boldsymbol{p}^*>0$ — некоторый вектор цен. Для доказательства леммы определим две функции от от цены k-го блага p_k. Первая из них представляет собой прибыль как функцию p_k при условии, что остальные цены зафиксированы на уровне $\boldsymbol{p}^*_{-k}$, т.е.

$$\pi^k(p_k) = \pi(\boldsymbol{p}^*_{-k}, p_k) = \pi(p^*_1, \ldots, p^*_{k-1}, p_k, p^*_{k+1}, \ldots, p^*_l).$$

Обозначив $\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}^*)$, определим вторую функцию как

$$\mathrm{g}(p_k) = p_k z^*_k + \sum_{j\neq k} p^*_j z^*_j.$$

Она является линейной функцией p_k.

По определению $\pi(\boldsymbol{p}^*) = \boldsymbol{p}^* \boldsymbol{z}^*$, а это означает, что $\pi^k(p^*_k) = \mathrm{g}(p^*_k)$. При других ценах, вообще говоря, $\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}^*)$ может не давать максимум прибыли, т. е $\pi^k(p_k) \geqslant \mathrm{g}(p_k)$. Таким образом, прямая $\mathrm{g}(p_k)$ является касательной графика функции $\pi^k(p_k)$ в точке p^*_k (точка A на Рис. 6). В точке касания

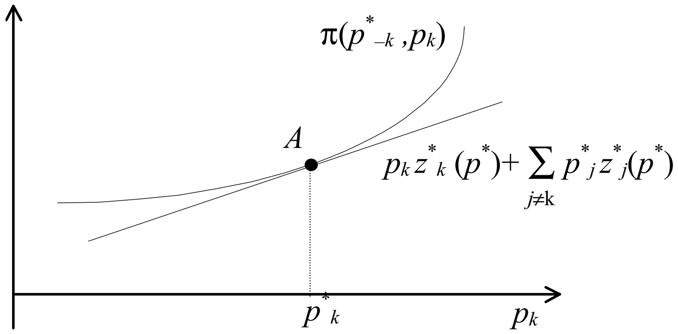


Рисунок 6. Иллюстрация доказательства Леммы Хотеллинга

$$\frac{\partial\pi^k(p^*_k)}{\partial p_k} = \frac{\partial \mathrm{g}(p^*_k)}{\partial p_k},$$

что и означает справедливость Леммы.

■

Утверждение 9. (Свойства функции $z(\boldsymbol{p})$)

- Функция $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ однородна нулевой степени.
- Если множество Z строго выпукло, то $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ — однозначная непрерывная функция.
- Если функция прибыли $\pi(.)$ дважды непрерывно дифференцируема, то матрица Якоби $M = \{\partial z_j/\partial p_k\}$ функции $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ симметрична и положительно полуопределена.

Доказательство:

Доказательство оставляем в качестве упражнения.

■

Если технологическое множество может быть представлено посредством производственной функции, то задача производителя при положительной цене выпускаемой продукции сводится к следующей:

$$p_y f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{w}\boldsymbol{x} \to \max_{\boldsymbol{x}}$$

$$\boldsymbol{x} \in X,$$

где p_y —цена выпускаемой продукции, $\boldsymbol{x}$ — количество затрачиваемых факторов производства, $\boldsymbol{w}$ — вектор цен факторов.

Пусть $\boldsymbol{x}(p_y, \boldsymbol{w})$ — функция спроса на факторы производства при векторе цен $(p_y, \boldsymbol{w})$, $y(p_y, \boldsymbol{w})$ — функция предложения продукции при векторе цен $(p_y, \boldsymbol{w})$. Заметим, что если $p_y > 0$, то $y(p_y, \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{x}(p_y, \boldsymbol{w}))$. В данном контексте функция прибыли записывается в следующем виде:

$$\pi(p_y, \boldsymbol{w}) = p_y f(\boldsymbol{x}(p_y, \boldsymbol{w})) - \boldsymbol{w}\boldsymbol{x}(p_y, \boldsymbol{w}).$$

Поясним связи переменных этой задачи с ранее рассмотренными. Как не трудно понять $\boldsymbol{p} = (p_y, \boldsymbol{w})$ и $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}) = (-\boldsymbol{x}(p_y, \boldsymbol{w}), y(p_y, \boldsymbol{w}))$.

Как результаты доказанные в этом параграфе, так и те которые будут доказаны впоследствии могут быть доказаны и в случае когда первичный объект рассмотрения не технологическое множество, а производственная функция.

Тесты и задачи для самостоятельного решения

1. Для случая, когда Z представлено дифференцируемой производственной функцией, можно доказать лемму Хотеллинга используя теорему Куна-Таккера. Проведите это доказательство. (Подсказка: см. первое доказательство леммы Шепарда для теории потребления.)

2. Докажите Утверждение **9**.

3. Покажите, что если производственная функция $f(.)$ строго вогнута, и кроме того, $f(\boldsymbol{0}) = 0$, то прибыль в точке оптимума неотрицательна.

4. Покажите, что если производственная функция в точке максимума прибыли обладает возрастающей отдачей от масштаба, то прибыль не может быть положительной. На основании этого выведите, что в случае возрастающей отдачи от масштаба задача производителя либо не имеет решения, либо **0** — решение задачи.

5. Пусть $y(p_y, \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{x}(p_y, \boldsymbol{w}))$, а $H = \left(\dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$ — матрица вторых производных производственной функции $f(\boldsymbol{x})$. Выведите следующие соотношения сравнительной статики для задачи производителя.

$$\frac{\partial y}{\partial p_y} = -\frac{1}{p_y}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right) H^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right)'$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial p_y} = -\frac{1}{p_y} H^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right)'$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{w}}\right)' = \frac{1}{p_y}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right) H^{-1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{w}} = \frac{1}{p_y} H^{-1}.$$

На основании этого сделайте заключение о поведении выпуска производителя и его спроса на факторы для вогнутых производственных функций. Проиллюстрируйте эти соотношения для производственной функции типа Кобба-Дугласа.

6. Пусть множество производственных возможностей фирмы задается условием:

$z_1 \leqslant \ln(1 - z_2)$, где $z_2 < 1$.

Постройте функции спроса / предложения на z_1, z_2. Постройте функцию прибыли для данной технологии.

7. Для технологии, описываемой производственной функцией $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\alpha}$, вычислите:

- ♦ функцию прибыли,
- ♦ функцию спроса на производственный фактор,
- ♦ функцию предложения,

Покажите, что

- ♦ функция прибыли однородна и выпукла (по ценам продукции (p) и фактора производства ($\boldsymbol{w}$)),
- ♦ функция спроса удовлетворяет закону спроса,
- ♦ функция предложения удовлетворяет закону предложения

8. Найдите функцию прибыли, функцию предложения и функцию спроса на факторы для перечисленных производственных функций:

а. $f(\boldsymbol{x}) = \prod x_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i > 0$ (функция Кобба-Дугласа).

б. $f(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i^{\rho}$

в. $f(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} v_i(x_i) + x_n$.

Какими свойствами обладают найденные функции? Покажите, что для данных функций выполнена лемма Хотеллинга.

9. Докажите, что валовой доход фирмы упадет, если цены на все факторы производства увеличатся пропорционально.

10. Покажите, что валовой доход фирмы упадет, если упадет цена по крайней мере одного из выпускаемых ею продуктов.

11. Покажите, что прибыль фирмы упадет, если вырастет цена по крайней мере на один из используемых ею факторов производства..

12. Покажите, что прибыль фирмы упадет, если упадет цена по крайней мере на один из выпускаемых ею продуктов.

13. Предположим, что производственная функция для некоторой технологии вогнута и сепарабельна, причем предельный продукт любого фактора производства как угодно мал при достаточно больших объемах затрат этого фактора производства. Покажите, что

- валовой доход фирмы упадет, если возрастет цена по крайней мере на один из используемых ею факторов производства;
- функция спроса (предложения) данной фирмы удовлетворяет условиям валовой заменимости;
- спрос данной фирмы на любой фактор производства неограниченно возрастает при падении цены этого фактора производства;
- предложение данной фирмы неограниченно возрастает при росте выпускаемой этой фирмой продукции.

14. Покажите, что в случае однородной производственной функции показатель отдачи от масштаба не зависит от цен факторов.

15. Покажите, что в случае однородной производственной функции отношение функций спроса на любые два фактора производства не зависит от цены продукции.

16. Покажите, что функция прибыли сепарабельна тогда и только тогда, когда сепарабельна функция спроса.

1.3. Восстановление технологического множества по функции прибыли

Аналог концепции выявленных предпочтений для модели производителя имеет довольно простой вид. Пусть ($\boldsymbol{p}^i$, $\boldsymbol{z}^i$) ($i = 1,\ldots,l$) — последовательность наблюдений: при ценах $\boldsymbol{p}^i$ наблюдался вектор чистого выпуска $\boldsymbol{z}^i$. Если при каком-то векторе цен $\boldsymbol{p}^i$ выполнено $\boldsymbol{p}^i\boldsymbol{z}^j > \boldsymbol{p}^i\boldsymbol{z}^i$, то $\boldsymbol{z}^i$ не максимизирует прибыль при ценах $\boldsymbol{p}^i$. А это противоречит рациональности производителя.

Если же $\boldsymbol{p}^i\boldsymbol{z}^j \leqslant \boldsymbol{p}^i\boldsymbol{z}^i \ \ \forall\, i, j$, то последовательность наблюдений $(\boldsymbol{p}^i,\boldsymbol{z}^i)$ $(i = 1,...,l)$ не противоречит гипотезе максимизации прибыли. Технологическое множество, которое порождает такие выборы производителя, может быть построено разными способами. Рассмотрим некоторые из них.

Наиболее простым является вариант, когда технологическое множество, которое при максимизации прибыли порождает такие выборы, состоит только из точек $\boldsymbol{z}^i$, т.е.

$$Z_1=\{\boldsymbol{z}^1, \boldsymbol{z}^2,...,\boldsymbol{z}^I\}.$$

Также можно в качестве технологического множества Z можно взять выпуклую оболочку Z_2 точек $\boldsymbol{z}^1$, $\boldsymbol{z}^2$,...,$\boldsymbol{z}^I$ (если мы предполагаем, что технологическое множество выпукло). Если мы предполагаем выпуклость и свободу расходования, то в качестве Z можно взять разность между Z_2 и $\mathbb{R}^l_+$: $Z_3 = Z_2 - \mathbb{R}^l_+$. Еще один вариант — пересечение полупространств, отсекаемых соответствующими гиперплоскостями:

$$Z_4 = \{\boldsymbol{z} \,|\, \boldsymbol{p}^i\boldsymbol{z} \leqslant \boldsymbol{p}^i\boldsymbol{z}^i,\ i = 1,...,I\,\}.$$

Все эти варианты для случая l=2 изображены на приведенных ниже рисунках. Прямые, нарисованные пунктиром, изображают цены. Отметим, что $Z_1 \subset Z_2 \subset Z_3 \subset Z_4$.

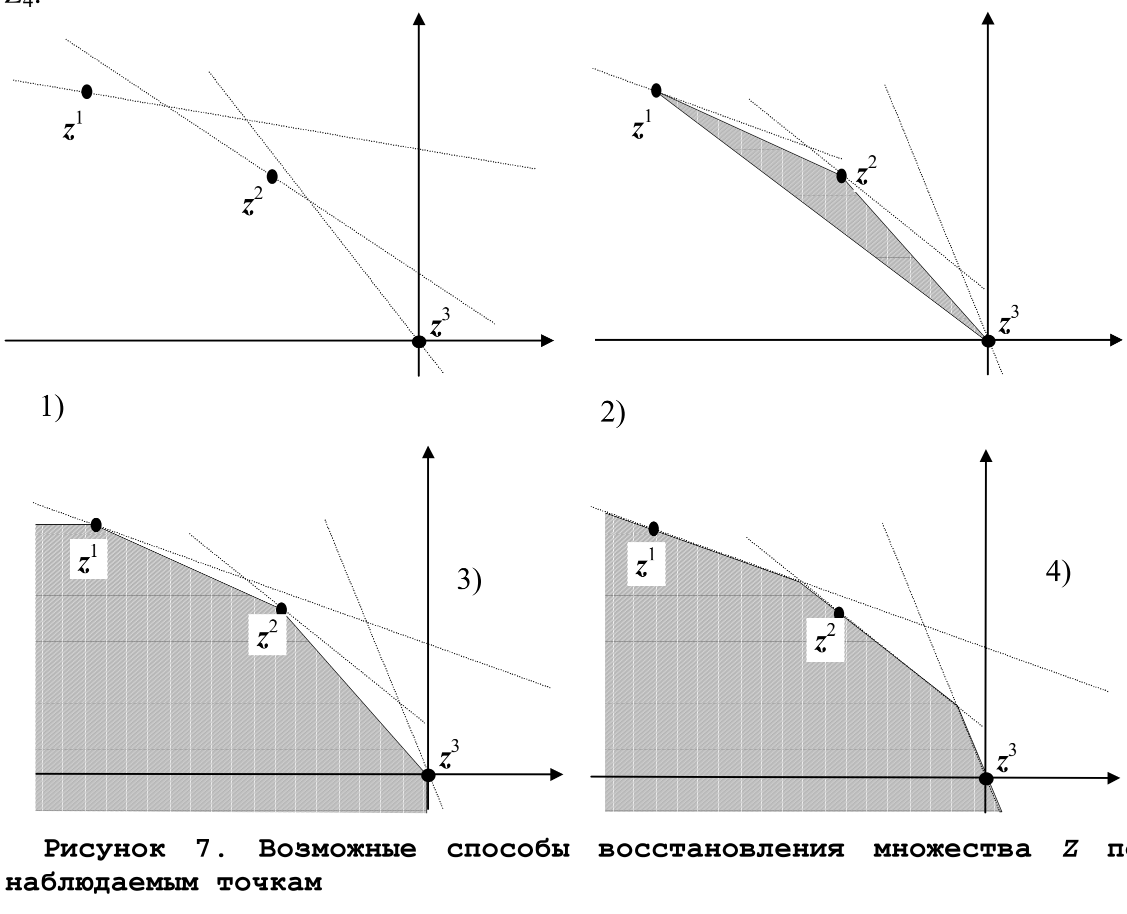


Рисунок 7. Возможные способы восстановления множества *Z* по наблюдаемым точкам

Рассмотрим некоторую функцию цен $\pi(\boldsymbol{p})$. Возникают два вопроса: будет ли она функцией прибыли рационального производителя (т.е функций порожденной максимизацией прибыли на некотором технологическом множестве. И если это так, то как “восстановить” множество Z или его характеристики.

Обсудим сначала вторую проблему, т.е. пусть известна функция прибыли $\pi(\boldsymbol{p})$ рационального производителя.

Заметим, что существование вектора $\boldsymbol{z} \in Z$, такого что $\boldsymbol{pz} > \pi(\boldsymbol{p})$ при некоторых ценах $\boldsymbol{p}$, противоречило бы гипотезе максимизации прибыли на Z. Объединим все вектора $\boldsymbol{z}$ не противоречащие этому условию при всех неотрицательных $\boldsymbol{p}$ в множество

$$Z_\pi = \bigcap_{\boldsymbol{p} \geqslant 0} \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{pz} \leqslant \pi(\boldsymbol{p})\} = \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{pz} \leqslant \pi(\boldsymbol{p}) \ \forall \boldsymbol{p} \geqslant 0\}.$$

Уместен вопрос: если мы построим по некоторому заданному производственному множеству Z функцию прибыли, а затем по ней построим множество Z_π, то совпадут ли множества Z и Z_π? Положительный ответ на этот вопрос позволил бы нам восстанавливать технологические множества по наблюдаемому поведению.

В общем случае Z и Z_π могут не совпадать, поскольку описанный метод построения Z_π порождает выпуклые множества (пересечение полупространств), удовлетворяющее свойству свободы расходования (поскольку берутся только неотрицательные цены), а технологическое множество Z может быть невыпуклым (как на Рис. 7(1)) или не удовлетворять свойству свободы расходования (как на Рис. 7(1) и (2)).

Утверждение 10.

Пусть технологическое множество Z замкнуто, выпукло и удовлетворяет свойству свободы расходования. Тогда оно совпадает с порождаемым им множеством Z_π.

<u>Доказательство</u>:

Мы докажем данное утверждение, если покажем, что $Z_\pi \subset Z$ и $Z \subset Z_\pi$.

1) ($Z \subset Z_\pi$). По определению функции прибыли для любого $\boldsymbol{z} \in Z$ имеем $\boldsymbol{pz} \leqslant \pi(\boldsymbol{p}) \ \forall \boldsymbol{p} \geqslant 0$, и значит, $\boldsymbol{z} \in Z_\pi$.

2) ($Z_\pi \subset Z$). Пусть $\tilde{\boldsymbol{z}} \notin Z$. По теореме об отделимости для любого выпуклого замкнутого множества и любой точки, не принадлежащей этому множеству, существует гиперплоскость, отделяющая эту точку от этого множества. В нашем случае это означает, что существует вектор коэффициентов $\tilde{\boldsymbol{p}}$, не равный нулю и такой, что

$$\tilde{\boldsymbol{p}}\tilde{\boldsymbol{z}} > \tilde{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{z} \ \forall \ \boldsymbol{z} \in Z.$$

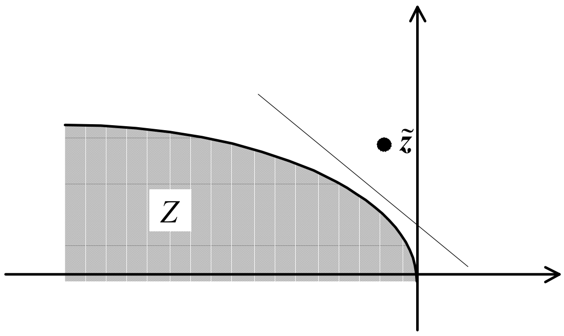


Рисунок 8. Иллюстрация отделимости

Покажем, что $\tilde{\boldsymbol{p}}$ может быть вектором цен. Для этого нужно, чтобы он не имел отрицательных компонент.

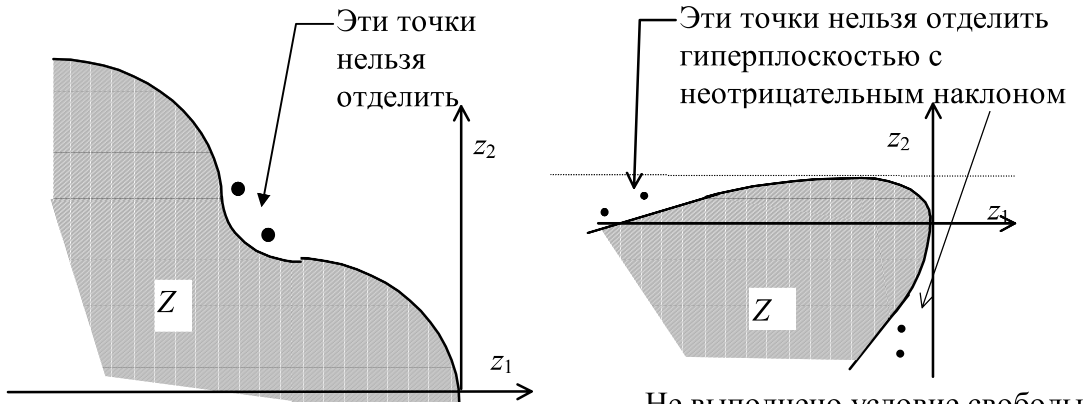
Предположим, что $\tilde{\boldsymbol{p}}_i<0$. Рассмотрим некоторую точку $\boldsymbol{z}'\in Z$ и луч $\boldsymbol{z}' - \lambda\mathbf{e}^i$ при $\lambda\geqslant 0$, где $\mathbf{e}^i$ — орт (i-я компонента равна 1, а остальные — нули). Этот луч целиком лежит во множестве Z, так как Z удовлетворяет свойству свободы расходования. Величина $\tilde{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{z}' - \lambda\tilde{\boldsymbol{p}}_i$ неограничена сверху. Это противоречит тому, что $\tilde{\boldsymbol{p}}\tilde{\boldsymbol{z}} > \tilde{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{z}\ \forall \boldsymbol{z}\in Z$. Мы пришли к противоречию, поэтому $\tilde{\boldsymbol{p}} \geqslant 0$.

Из того, что $\tilde{\boldsymbol{p}} \geqslant 0$ и $\tilde{\boldsymbol{p}}\tilde{\boldsymbol{z}} > \tilde{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{z}\ \forall\ \boldsymbol{z}\in Z$, следует, что $\tilde{\boldsymbol{p}}\tilde{\boldsymbol{z}} > \pi(\tilde{\boldsymbol{p}})$. Значит, $\boldsymbol{z}\notin Z_\pi$.

Мы показали, что любая точка, которая не принадлежит Z, не принадлежит и Z_π. А это значит, что $Z_\pi \subset Z$.

■

Ниже на рисунке приведены, примеры ситуаций, когда при нарушении предположений теоремы, ее утверждение ($Z_\pi \subset Z$) неверно и, тем самым, невозможно восстановить Z на основе функции прибыли.



Не выполнено условие выпуклости

Не выполнено условие свободы расходования

Рисунок 9. Ситуации, когда невозможно восстановить *Z*.

Таким образом, мы показали, что при определенных условиях множества Z и Z_π совпадают. В общем случае это неверно и выполняется лишь включение $Z \subset Z_\pi$. Максимизация прибыли на Z_π порождает некоторую функцию прибыли $\pi^*(\boldsymbol{p})$. Возникает вопрос о том, как связаны функции $\pi(\boldsymbol{p})$ и $\pi^*(\boldsymbol{p})$.

Покажем, что эти функции совпадают даже в том случае, когда Z и Z_π не совпадают, т.е. Z_π порождает ту же самую функцию прибыли.

Утверждение 11.

Пусть $\pi(\boldsymbol{p})$ — функция прибыли, построенная на основе технологического множества Z, а $\pi^*(\boldsymbol{p})$ — функция прибыли, построенная на основе множества Z_π.

Тогда $\pi(\boldsymbol{p}) = \pi^*(\boldsymbol{p})$.

Доказательство:

Если расширить допустимое множество в задаче максимизации, то значение целевой функции не уменьшится. Поэтому из $Z \subset Z_\pi$ следует, что $\pi(\boldsymbol{p}) \leqslant \pi^*(\boldsymbol{p})$.

Предположим, что для некоторого $\tilde{\boldsymbol{p}}$ оказалось, что $\pi(\tilde{\boldsymbol{p}}) < \pi^*(\tilde{\boldsymbol{p}})$. По определению $\pi^*(\tilde{\boldsymbol{p}})$ существует $\tilde{\boldsymbol{z}} \in Z_\pi$ такое, что $\tilde{\boldsymbol{p}}\tilde{\boldsymbol{z}} = \pi^*(\tilde{\boldsymbol{p}})$, и, следовательно, $\tilde{\boldsymbol{p}}\tilde{\boldsymbol{z}} > \pi(\tilde{\boldsymbol{p}})$. Но существование такого $\tilde{\boldsymbol{z}} \in Z_\pi$ противоречит определению множества Z_π (как множества тех $\boldsymbol{z}$, для которых прибыль $\boldsymbol{pz}$ не больше, чем $\pi(\boldsymbol{p})$).

■

Обсудим теперь первую проблему: как для данной функции $\pi(\boldsymbol{p})$ и функции $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$, определить, являются ли они функцией прибыли и функцией предложения рационального производителя?

Понятно, что необходимыми требованиями к функции прибыли являются ее выпуклость, однородность первой степени и непрерывность. Оказывается, что эти условия являются и достаточными для того, чтобы произвольная функция $\pi(\boldsymbol{p})$ была функцией прибыли для некоторого технологического множества. В качестве такого множества можно взять рассмотренное выше множество

$$Z_\pi = \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{pz} \leqslant \pi(\boldsymbol{p})\ \forall \boldsymbol{p} \geqslant 0\}.$$

Следующий набор утверждений формализует сказанное выше:

(1) Если функция $\pi(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет набору необходимых условий для функции прибыли, то построенная на ее основе функция $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет набору необходимых условий для функции предложения производителя.

(2) Если функция $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет набору необходимых условий для функции предложения производителя, то построенная на ее основе функция $\pi(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет набору необходимых условий для функции прибыли.

(3) Если функция $\pi(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет набору необходимых условий для функции прибыли, то существует технологическое множество, порождающее $\pi(\boldsymbol{p})$ как функцию прибыли.

Перечислим упомянутые необходимые условия. Для удобства доказательства потребуем дополнительно, что $\pi(\boldsymbol{p})$ является дважды непрерывно дифференцируемой, а $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ — непрерывно дифференцируемой.

<u>Условия на функцию $\pi(\boldsymbol{p})$</u>:

(**A1**) положительная однородность первой степени;

(**A2**) выпуклость;

(**A3**) $\pi(.)$ дважды непрерывно дифференцируема (более сильное условие, чем требуется).

<u>Условия на функцию $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$</u>:

(**B1**) положительно однородна нулевой степени,

(**B2**) матрица производных $M = \{\partial z_j/\partial p_k\}$ существует и непрерывна, положительно полуопределена и симметрична.

Сформулируем приведенный выше набор неформальных утверждений как теорему.

Утверждение 12.

(1) Пусть

$$z_k(\boldsymbol{p}) = \frac{\partial\pi(\boldsymbol{p})}{\partial p_k},$$

где функция $\pi(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет условиям (**A1**), (**A2**), (**A3**).

Тогда $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}) = (z_1(\boldsymbol{p}),...,z_l(\boldsymbol{p}))$ удовлетворяет условиям (**B1**), (**B2**) налагаемым на функцию спроса-предложения производителя.

(2) Пусть функция $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет условиям (**B1**), (**B2**).

Тогда функция $\pi(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет условиям (**A1**), (**A2**), (**A3**).

(3) Пусть функция $\pi(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет условиям (**A1**), (**A2**), (**A3**). Тогда множество $Z_\pi = \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{p}\boldsymbol{z} \leqslant \pi(\boldsymbol{p})\ \forall\ \boldsymbol{p} \geqslant 0\}$ является технологическим множеством порождающим функцию прибыли $\pi(\boldsymbol{p})$.

Доказательство:

(1) (**A1**)-(**A3**) $\Rightarrow$ (**B1**)-(**B2**).

Поскольку функция $\pi(\boldsymbol{p})$ однородна первой степени, то ее производная $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ однородна нулевой степени.

Непрерывная дифференцируемость $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ следует из дважды непрерывной дифференцируемости функции $\pi(\boldsymbol{p})$.

Матрица вторых производных любой дважды непрерывно дифференцируемой функции симметрична. Применяя это свойство к функции $\pi(\boldsymbol{p})$ имеем,

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial p_j \partial p_k} = \frac{\partial^2\pi}{\partial p_k \partial p_j}.$$

Матрица вторых производных функции $\pi(\boldsymbol{p})$ есть матрица первых производных функции $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$. Поэтому

$$\frac{\partial z_j}{\partial p_k} = \frac{\partial z_k}{\partial p_j}.$$

Положительная полуопределенность матрицы вторых производных (то есть $\boldsymbol{x}^T M \boldsymbol{x} \geqslant 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$) — необходимый (и достаточный) признак выпуклости любой дважды дифференцируемой функции.

(2) (**B1**)-(**B2**) $\Rightarrow$ (**A1**)-(**A3**).

Продифференцируем $\pi(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p}) = \sum p_k z_k(\boldsymbol{p})$ по p_k:

$$\frac{\partial\pi(\boldsymbol{p})}{\partial p_k} = z_k(\boldsymbol{p}) + \sum_{i=1}^{l} p_i \frac{\partial z_i(\boldsymbol{p})}{\partial p_k} = z_k(\boldsymbol{p}) + \sum_{i=1}^{l} p_i \frac{\partial z_k(\boldsymbol{p})}{\partial p_i}.$$

Второе равенство - следствие симметричности производных функции $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$. Так как $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ — положительно однородна нулевой степени, то по закону Эйлера

$$\sum_{i=1}^{l} p_i \frac{\partial z_k(\boldsymbol{p})}{\partial p_i} = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial\pi(\boldsymbol{p})}{\partial p_k} = z_k(\boldsymbol{p}).$$

Далее воспроизводим доказательство пункта **(1)** в обратном порядке.

(3)

Обозначим

$$z(\boldsymbol{p}) = \frac{\partial \pi(\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}} = \nabla \pi(\boldsymbol{p}).$$

Так как $\pi(\boldsymbol{p})$ — однородная первой степени функция и $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ — ее градиент, то по закону Эйлера

$$\pi(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}z(\boldsymbol{p}).$$

Поскольку $\boldsymbol{p}z(\boldsymbol{p}) = \pi(\boldsymbol{p})$, то в точке $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ при данных ценах $\boldsymbol{p}$ величина $\boldsymbol{p}z(\boldsymbol{p})$ всегда не меньше, чем $\boldsymbol{p}z$ в любой точке $z \in Z_\pi$. Если мы докажем, что при любых ценах $\boldsymbol{p} \geqslant 0$ точка $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{p})$ принадлежит множеству $Z_\pi = \{z \mid \boldsymbol{p}'z \leqslant \pi(\boldsymbol{p}') \ \forall \ \boldsymbol{p}' \geqslant 0\}$, то тем самым мы докажем, что $\pi(\boldsymbol{p})$ есть функция прибыли, соответствующая технологическому множеству Z_π.

То есть нам требуется показать, что $\boldsymbol{p}'z(\boldsymbol{p}) \leqslant \pi(\boldsymbol{p}') \ \forall \ \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}' \geqslant 0$.

График всякой выпуклой непрерывно дифференцируемой функция $\psi(\boldsymbol{x})$ лежит выше своей касательной, т.е. выполняется соотношение:

$$\psi(\boldsymbol{x}') \geqslant \psi(\boldsymbol{x}) + \nabla \psi(\boldsymbol{x}) (\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}).$$

Так как $\pi(\boldsymbol{p})$ — выпуклая непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\pi(\boldsymbol{p}') \geqslant \pi(\boldsymbol{p}) + \nabla\pi(\boldsymbol{p}) (\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}).$$

Поскольку $\nabla\pi(\boldsymbol{p}) = z(\boldsymbol{p})$ и $\boldsymbol{p}z(\boldsymbol{p}) = \pi(\boldsymbol{p})$, получаем требуемое для доказательства утверждения соотношение

$$\pi(\boldsymbol{p}') \geqslant \pi(\boldsymbol{p}) + z(\boldsymbol{p}) (\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}) = z(\boldsymbol{p})\, \boldsymbol{p}'.$$

■

Тесты и задачи для самостоятельного решения

1. Известно, что при ценах (1, 2) производитель выбрал вектор выпуска (1, –1), а при ценах (2, 1) — вектор выпуска (–1, 1). Совместимо ли это с максимизацией прибыли?

2. Известно, что при ценах (3, 2) производитель выбрал вектор выпуска (2, –1), а при ценах (2, 3) — вектор выпуска (1, –2). Совместимо ли это с максимизацией прибыли?

3. Известно, что при ценах (1, 4) производитель выбрал вектор выпуска (–4, 3), при ценах (1, 1) — вектор выпуска (0, 0), а при ценах (2, 1) — вектор выпуска (3, –4). Можно ли гарантировать, что вектор выпуска (–1, 2) не принадлежит множеству допустимых технологий?

4. Известно, что при ценах (1, 4) производитель выбрал вектор выпуска (–4, 3), при ценах (1, 1) — вектор выпуска (0, 0), а при ценах (2, 1) — вектор выпуска (3, –4). Можно ли гарантировать, что вектор выпуска (–9, 4) не принадлежит множеству допустимых технологий?

5. Сформулируйте аксиому выявленных предпочтений для модели производителя. Докажите, что если технологическое множество описывается строго вогнутой производственной функцией, то выбор производителя удовлетворяет аксиоме выявленных предпочтений.

6. Покажите, что выполняется соотношение $\Delta p_y\, \Delta y - \Delta \boldsymbol{w}\, \Delta \boldsymbol{x} \geqslant 0$.

7. Известно, что спрос потребителя удовлетворяет закону спроса только в случае благ, не являющихся товарами Гиффена, а спрос на факторы производства удовлетворяет закону спроса всегда. Какие особенно моделей рационального поведения производителя и потребителя предопределяют такие особенности их поведения?

8. Пусть функция прибыли производителя имеет вид

$$\pi(\boldsymbol{p}) = p_1(\ln\frac{p_1}{p_2} - 1) + p_2.$$

Проверьте, что эта функция удовлетворяет свойствам функции прибыли. Восстановите по функции прибыли соответствующее ей технологическое множество.

9. Пусть функция прибыли производителя имеет вид

$$\pi(p_y, \boldsymbol{w}) = p_y^{\frac{1}{1-\alpha}} (\frac{\alpha}{\boldsymbol{w}})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \boldsymbol{w}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (p_y \alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Проверьте, что эта функция удовлетворяет свойствам функции прибыли. Найдите функцию спроса. Восстановите по функции прибыли соответствующее ей технологическое множество.

1.4. Функция издержек и ее свойства

Итак, мы изучили основные свойства модели рационального поведения производителя. По причинам, которые станут ясны из дальнейшего, в микроэкономике утвердилась традиция описывать технологию посредством функции издержек. В этим параграфе приведем соответствующие результаты относительно свойств функций издержек и связь этого понятия с рассмотренными выше.

Пусть, как и ранее, $\boldsymbol{y}$ — вектор выпуска, а $\boldsymbol{x}$ — вектор затрат на ее производство.

Определение 4.

Для каждого вектора выпуска $\boldsymbol{y}$ множество требуемых затрат $V(\boldsymbol{y})$ — это множество векторов затрат, обеспечивающих этот выпуск при данном технологическом множестве Z, т.е.

$$V(\boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{x} \mid (-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in Z\}.$$

Из предполагаемых свойств Z вытекают некоторые свойства множества $V(\boldsymbol{y})$ и соответствующего отображения $V(.)$:

1. Из выпуклости Z следует выпуклость множеств $V(\boldsymbol{y})$:

2. Из свободы расходования для Z следует свобода расходования для множеств $V(\boldsymbol{y})$:

$$\boldsymbol{x}\in V(\boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{x}' \geqslant \boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{x}'\in V(\boldsymbol{y}).$$

Заметим, что обратное, вообще говоря, неверно.

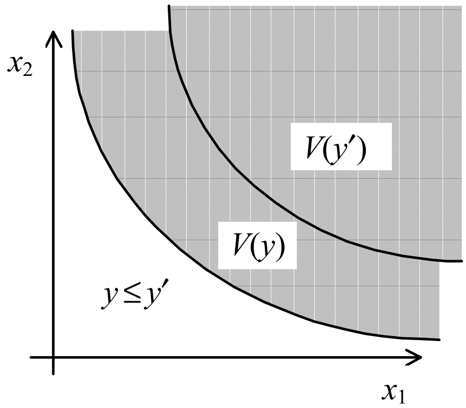


Рисунок 10. Монотонность V(.)

Обычно предполагается монотонность отображения $V(.)$, т. е. вложенность множеств $V(.)$:

$$\boldsymbol{y} \leqslant \boldsymbol{y}' \Rightarrow V(\boldsymbol{y}') \subset V(\boldsymbol{y}).$$

Множества $V(y)$, как и Z, в предположении свободного расходования можно строить по производственной функции:

$$V(y) = \{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) \geqslant y\}.$$

Обратно, в случае однопродуктовой технологии ($y \in \mathbb{R}$), можно определить на основе $V(.)$ производственную функцию следующим образом:

$$f(\boldsymbol{x}) = \max y_{\ \boldsymbol{x}\in V(y)}.$$

Утверждение 13.

Если отображение $V(.)$ монотонно, то соответствующая производственная функция монотонна, а если к тому же множества $V(y)$ выпуклы, то она квазивогнута.

Доказательство:

Доказательство этого утверждения оставляется читателю в качестве упражнения. ■

В терминах множеств $V(y)$ можно определить **изокванты** для данной технологии

$$Q(y) = \{\ \boldsymbol{x}\in V(y)\ \mid\ \boldsymbol{x} \notin V(y'),\ \ \forall\ y'>y\ \}.$$

Это множество таких векторов затрат $\boldsymbol{x}$, которые позволяют произвести y, но не позволяют произвести больше y. Таким образом, изокванта $Q(y)$ — это граница множества $V(y)$.

Например, для производственной функции Кобба-Дугласа с двумя видами затрат имеем

$$Z=\{(-x_1,-x_2,y) \mid y\leqslant x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}\}$$
$$V(y)=\{(x_1,x_2) \mid y\leqslant x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}\}$$
$$Q(y)=\{(x_1,x_2) \mid y=x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}\}$$

Напомним, что через $\boldsymbol{w}$ мы обозначаем цены затрачиваемых ресурсов (часть общего вектора цен $\boldsymbol{p}$, соответствующая $-\boldsymbol{x}$).

По аналогии с Задачей 3 рассмотрим следующую задачу

Задача 4.

$$\boldsymbol{wx} \to \min$$
$$\boldsymbol{x} \in V(\boldsymbol{y}).$$

Определение 5.

Функция издержек $c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$ — значение целевой функции Задачи 4 — для каждого вектора цен $\boldsymbol{w}$ и выпуска $\boldsymbol{y}$ указывает минимальную величину издержек, при которых в соответствие с данной технологией можно произвести $\boldsymbol{y}$.

Если технология задана производственной функцией $y \leqslant f(\boldsymbol{x})$, то Задача 4 примет вид:

$$\boldsymbol{wx} \to \min$$
$$y = f(\boldsymbol{x}).$$

Утверждение 14. **(Свойства функции издержек $c(w, y)$ выпуклой технологии)**

1) $c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$ положительно однородна первой степени по ценам факторов:

$$c(\lambda \boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}) = \lambda\, c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}).$$

2) Монотонна по ценам факторов и выпуску.

3) Вогнута по ценам (поточечный максимум вогнутых функций).

4) Непрерывна.

Доказательство:

Доказательство этого утверждения аналогично приводимым ранее и оставляется читателю в качестве упражнения.

■

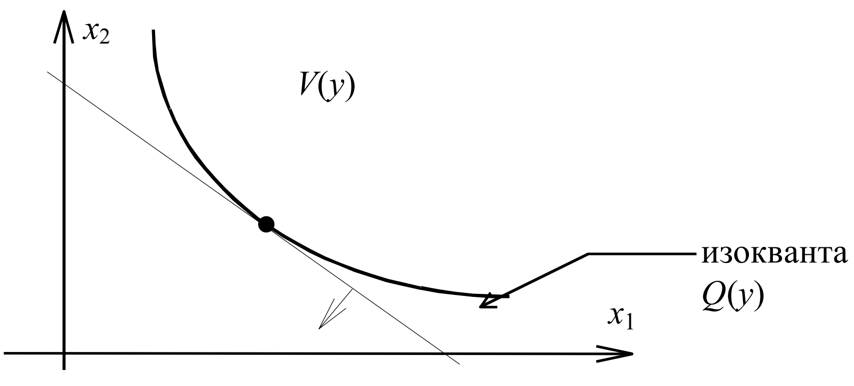


Рисунок 11. Построение функции издержек

В дальнейшем нам понадобится также понятие функции условного спроса.

Определение 6.

Функция условного спроса на факторы производства $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$ есть оптимальное решение Задачи 4.

Заметим, что функция издержек и функция условного спроса на факторы производства определены для любой технологии (непустого замкнутого множества Z).

Утверждение 15. (Свойства функции $x(w, y)$)
1) Функция $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$ однородна нулевой степени как функция цен факторов производства.
2) Если множество $V(\boldsymbol{y})$ строго выпукло, то $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$ — однозначная непрерывная функция $\boldsymbol{w}$.

Доказательство:
Доказательство этого утверждения аналогично приводимым ранее и оставляется читателю в качестве упражнения.
■

Если кроме того функция издержек дифференцируема, то верна **лемма Шеппарда**:

Утверждение 16.
Пусть $\boldsymbol{x}^*$ — вектор условного спроса на факторы производства при ценах $\boldsymbol{w}^*$, когда требуется произвести $\boldsymbol{y}$. Тогда

$$\frac{\partial c(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{y})}{\partial w_i} = x_i(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{y}) = x_i^*.$$

или

$$\nabla c(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^*,$$

Доказательство:
Введем функцию $g(\boldsymbol{w}) = c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{w}\boldsymbol{x}^*$.
По определению функции издержек функция $g(\boldsymbol{w})$ достигает максимума в точке $\boldsymbol{w}^*$:

$$g(\boldsymbol{w}) \leqslant 0.$$
$$g(\boldsymbol{w}^*) = 0.$$

Если функция издержек дифференцируема, то g тоже дифференцируема. Если точка оптимума внутренняя ($\boldsymbol{w}^*>0$), то по условию первого порядка максимума градиент ее должен быть равен нулю:

$$\nabla g(\boldsymbol{w}^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla c(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^*.$$

■

Построим по функции издержек $c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$ при некотором фиксированном объеме производства следующее множество:

$$V_c(\boldsymbol{y}) := \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{w}\boldsymbol{x} \geqslant c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})\ \forall \boldsymbol{w} \geqslant 0\}.$$

При любом векторе выпуска $\boldsymbol{y}$ это множество является выпуклым по построению. Так как цены неотрицательны, то выполняется также следующее свойство, которое можно называть свойством свободы расходования ресурсов:

$$V_c(\boldsymbol{y}) = V_c(\boldsymbol{y}) + \mathbb{R}^n_+, \qquad (*)$$

т.е. если $\boldsymbol{x}$ принадлежит множеству $V_c(\boldsymbol{y})$ и $\boldsymbol{x}' \geqslant \boldsymbol{x}$, то $\boldsymbol{x}'$ также принадлежит множеству $V_c(\boldsymbol{y})$.

Ясно, что множество требуемых затрат $V(\boldsymbol{y})$ и $V_c(\boldsymbol{y})$ могут не совпадать, если само исходное множество допустимых затрат $V(\boldsymbol{y})$ не является выпуклым или монотонным.

Утверждение 17.
Пусть $V(\boldsymbol{y})$ выпуклое и монотонное (удовлетворяющее свойству (*)) множество. Тогда $V(\boldsymbol{y}) = V_c(\boldsymbol{y})$.

Доказательство:
Доказательство этого утверждения оставляется читателю в качестве упражнения.
■

Отметим, что даже если множества $V(\boldsymbol{y})$ и $V_c(\boldsymbol{y})$ не совпадают друг с другом, это различие не существенно с точки зрения описания поведения производителя, поскольку $V_c(\boldsymbol{y})$ порождает ту же самую функцию издержек, что и $V(\boldsymbol{y})$.

Утверждение 18.
Пусть $c^*(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})$ — решение задачи

$$\boldsymbol{wx} \to \min_{\boldsymbol{x}}$$
$$\boldsymbol{x} \in V_c(\boldsymbol{y}).$$

Тогда $c^*(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}) = c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$.

Доказательство:
Доказательство этого утверждения оставляется читателю в качестве упражнения.
■

Заметим, что два эти утверждения — аналоги соответствующих результатов относительно связи Z и Z_π, $\pi(\mathrm{p})$ и $\pi^*(\mathrm{p})$.

Это утверждение обосновывает возможность получения *некоторого* множества допустимых затрат $V_c(\boldsymbol{y})$, порождающего функцию издержек $c(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})$. Но совпадение $V_c(\boldsymbol{y})$ и $V(\boldsymbol{y})$ возможно только в том случае, когда $V(\boldsymbol{y})$ удовлетворяет предположениям выпуклости и монотонности. Практический способ восстановления V читатель может сконструировать сам.

В заключение укажем на связь между двумя типами кривых: изоквантами в пространстве возможных издержек, определяемыми уравнениями типа $f(\boldsymbol{x}) = y$ при разных y и изокостами в пространстве возможных цен, определяемыми формулами типа $c(\boldsymbol{w},y) = const$.

Для наглядности рассмотрим случай двух производственных факторов. Тогда при монотонной технологии можно рассматривать изокванту как функцию $x_2(x_1)$, а изокосту — как функцию $w_2(w_1)$. Эти зависимости задаются соответствующими соотношениями, определяющими их как неявные функции.

Из определения изокосты имеем

$$c(w_1+dw_1,\ w_2+dw_2,\ y) = c(w_1,\ w_2,\ y) \text{ или}$$

$$dw_1\frac{\partial c}{\partial w_1} + dw_2\frac{\partial c}{\partial w_2} = 0$$

Тогда

$$\frac{dw_2}{dw_1} = -\frac{\frac{\partial c}{\partial w_1}(\boldsymbol{w},y)}{\frac{\partial c}{\partial w_2}(\boldsymbol{w},y)} = -\frac{x_1(\boldsymbol{w},y)}{x_2(\boldsymbol{w},y)} = -\frac{x_1^*}{x_2^*}$$

Аналогично получим соотношение для изокванты

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}}{\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}} = -\frac{w_1}{w_2}.$$

Эти соотношения двойственности показывают, что чем больше кривизна изокосты, тем меньше кривизна изокванты, и наоборот. Действительно, на графиках видно, что если две точки, $\tilde{\boldsymbol{x}}$ и $\bar{\boldsymbol{x}}$ одного графика далеки друг от друга, а их касательные близки (малая кривизна, то есть сильная взаимозаменяемость затрат в производстве), то в двойственном графике соответствующие точки $\bar{\boldsymbol{w}}$, $\tilde{\boldsymbol{w}}$ будут характеризоваться, наоборот, близким положением, но сильно отличающимися касательными.

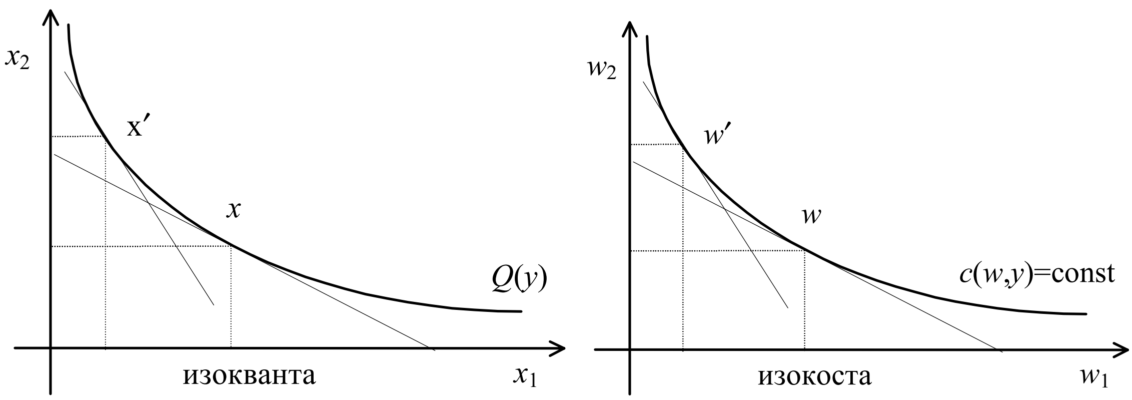
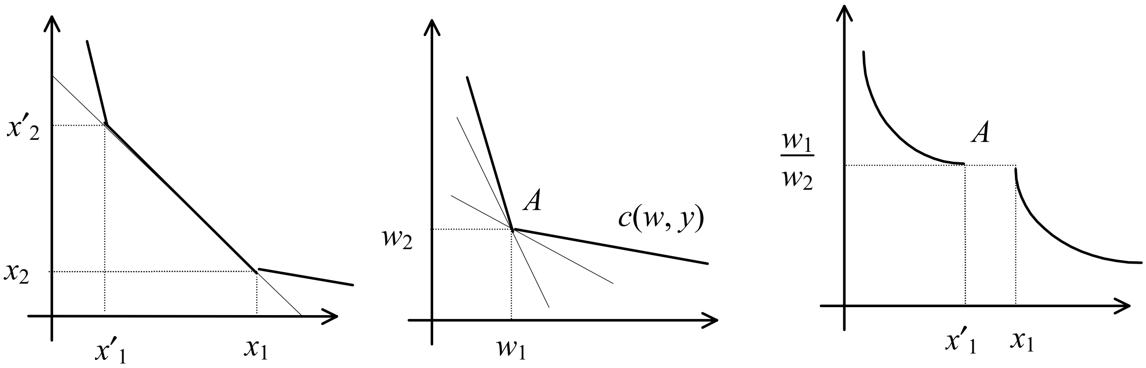


Рисунок 12

При полной взаимозаменяемости затрат любой структуре затрат соответствует одна и та же структура цен (см. рис ниже). Таким образом, структура цен не определяет однозначно структуру затрат.



В любой точке отрезка производная одна и та же

Множество производных одной точке

Кривая спроса

Рисунок 13

И наоборот, если затраты жестко взаимодополняемы, то цены, при которых эти затраты минимизирую издержки, определяются неоднозначно.

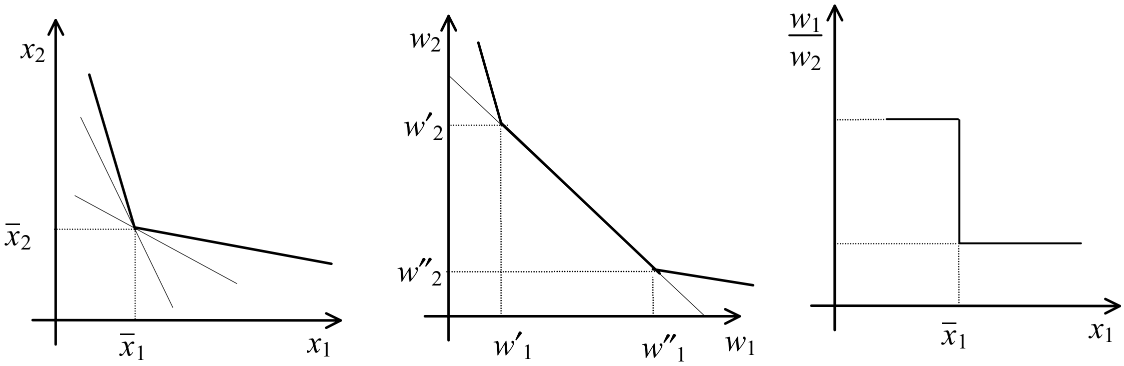


Рисунок 14. Ситуация, обратная предыдущей

Еще один «нерегулярный» случай— невыпуклость IRS — иллюстрирует нижеследующий рисунок.

При разных векторах цен $\boldsymbol{w}$ один и тот же $\boldsymbol{x}$.

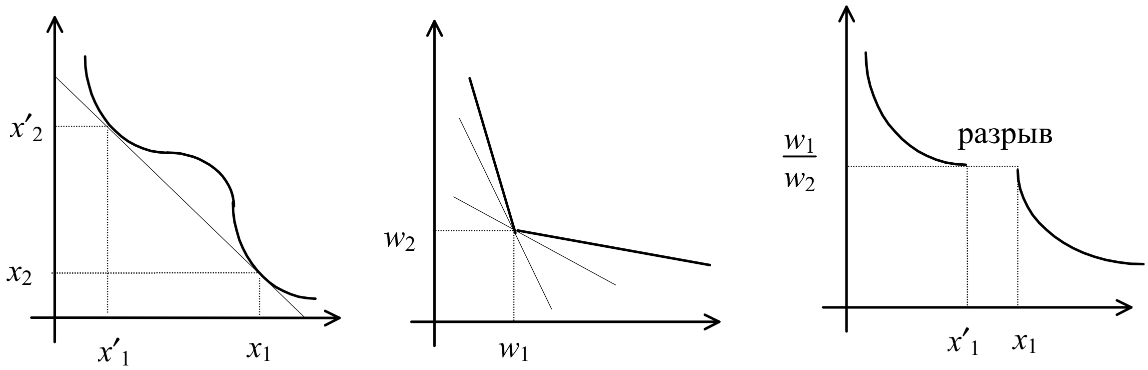


Рисунок 15. Изокванта не является выпуклой функцией

Тесты и задачи для самостоятельного решения

1. Функция $c(y,\mathbf{w}) = y^{1/2}(w_1 w_2)^{3/4}$ является функцией издержек для некоторой технологии

- ♦ Да
- ♦ Нет
- ♦ Недостаточно информации

2. Функция $c(y,\mathbf{w}) = (y + 1/y)(w_1 w_2)^{1/2}$ является функцией издержек для некоторой технологии

- ♦ Да
- ♦ Нет
- ♦ Недостаточно информации

3. Функция $c(y,\mathbf{w}) = y(w_1 - (w_1 w_2)^{1/2} + w_2)$ является функцией издержек для некоторой технологии

- ♦ Да
- ♦ Нет
- ♦ Недостаточно информации

4. Функция $c(y,\mathbf{w}) = y(w_1 + w_2)$ является функцией издержек для некоторой технологии

- ♦ Да
- ♦ Нет
- ♦ Недостаточно информации

5. Функция $c(y,\mathbf{w}) = y \min\{w_1, w_2\}$ является функцией издержек для некоторой технологии

- ♦ Да
- ♦ Нет
- ♦ Недостаточно информации

6. Функция $c(y,\boldsymbol{w}) = y(a\,w_1 + b\,w_2)$ является функцией издержек для некоторой технологии

♦ При положительных коэффициентах a и b

♦ Если a равно b

♦ При любых коэффициентах a и b данная функция не является функцией издержек для некоторой технологии

7. Функция $c(y,\boldsymbol{w}) = y \min\{a\,w_1,\ b\,w_2\}$ является функцией издержек для некоторой технологии

♦ При положительных коэффициентах a и b

♦ Если a равно b

♦ При любых коэффициентах a и b данная функция не является функцией издержек для некоторой технологии

8. Функция $c(y,\boldsymbol{w}) = y\, w_1^a\, w_2^b$ является функцией издержек для некоторой технологии

♦ Если сумма $a+b$ меньше или равна единицы

♦ При положительных коэффициентах a и b и если сумма $a+b$ меньше или равна единице

♦ При положительных коэффициентах a и b и если сумма $a+b$ больше единицы

9. Множество требуемых ресурсов на производство объема y задается неравенством

$$ax_1 + bx_2 \geqslant y^2 \text{ при } a,b>0.$$

Какой вид имеет соответствующая производственная функция?

10. Найдите функции издержек для следующих производственных функций:

а. $f(\boldsymbol{x}) = \prod x_i^{\alpha_i},\ \alpha_i > 0.$

б. $f(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i^{\rho}$

в. $f(\boldsymbol{x}) = \min\{x_i / a_i\}$

г. $f(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i.$

11. Предположим, что предприятие имеет строго вогнутую производственную функцию $f(\boldsymbol{x})$. Рассмотрим следующие две задачи:

$\boldsymbol{wx} \to \min_{\boldsymbol{x}}$	$f(\boldsymbol{x}) \to \max_{\boldsymbol{x}}$
$y^* \leqslant f(\boldsymbol{x})$	$\boldsymbol{wx} \leqslant c^*$

Докажите следующие два утверждения:

I. Пусть $\boldsymbol{x}^*$ является решением первой задачи. Тогда $\boldsymbol{x}^*$ является решением второй задачи при $c^* = \boldsymbol{wx}^*$.

II. Пусть $\boldsymbol{x}^*$ является решением второй задачи. Тогда $\boldsymbol{x}^*$ является решением первой задачи при $y^* = f(\boldsymbol{x}^*)$.

12. Предположим, что предприятие со строго вогнутой производственной функцией $f(\boldsymbol{x})$ имеет функцию издержек $c(\boldsymbol{w}, y)$. Докажите, что оптимальный объем производство в следующих двух задачах совпадает

$$p_y y - \boldsymbol{wx} \to \max_{y,\,\boldsymbol{x}} \qquad\qquad p_y y - \mathrm{c}(\boldsymbol{w},y) \to \max_{\boldsymbol{x}}$$
$$y \leqslant f(\boldsymbol{x})$$

13. Доказать, что если функция издержек выпукла, то производителю выгоднее производить продукцию, чем закрыться (производить нулевой объем).

14. Докажите Утверждение **13**.

15. Докажите Утверждение **14**.

16. Докажите Утверждение **15**.

17. Докажите Утверждение **17**.

18. Докажите Утверждение **18**.

19. Пусть функция издержек строго вогнута, и, кроме того, С(0) = 0. Докажите, что данная функция издержек была порождена производственной функцией, которая в точках оптимального выбора производителя характеризуется возрастающей отдачей от масштаба.

20. Для технологии, описываемой производственной функцией $f(\boldsymbol{x}) = x^{\alpha}$, вычислите функцию издержек. Покажите, что функция издержек однородна по цене фактора производства и выпукла по выпуску (y).

21. Показать, что если производственная функция квазивогнута и обладает постоянной отдачей от масштаба, то функция предельных издержек не убывает по выпуску.

22. Множество требуемых ресурсов на производство объема y задается неравенством

$$ax_1 + \mathrm{b}x_2 \geqslant y^2 \text{ при } a,\mathrm{b}>0.$$

Постройте функцию издержек.

23. Покажите, что издержки фирмы возрастут, если цены на все выпускаемые ею продукты увеличатся пропорционально.

24. Предположим, что производственная функция строго вогнута. Покажите, что функция издержек выпукла и строго выпукла, если хотя бы один фактор производства является переменным (т.е. в краткосрочном, среднесрочном и долгосрочном периоде).

25. Фирма имеет n заводов, издержки производства на которых описываются следующими функциями $c_i(y) = \alpha_i y^2$, i=1,...,n. Определите функцию издержек фирмы.

26. Фирма имеет два завода, издержки производства на которых описываются следующими функциями $c_1(y) = \alpha y^2$, $c_2(y) = \beta y$. Определите функцию издержек фирмы.

1. Поведение потребителя в условиях риска

Предпочтения на лотереях и их представимость линейной функцией полезности

Обычная ситуация выбора, с которой сталкивается экономические агенты, — это ситуация, когда альтернативы представляют собой распределения вероятностей на некотором множестве возможных ситуаций. Будем называть это множество **множеством состояний мира.** С точки зрения теории вероятностей это множество элементарных исходов. Поскольку мы рассматриваем в данном случае единственного потребителя, то состояние мира можно отождествить с переменной ($\boldsymbol{x}$), описывающей его положение, а множество состояний мира — с множеством ситуаций (X), в которых он может оказаться. Это может быть, например, некоторый набор из множества допустимых потребительских наборов. Часто рассматривают случай, когда $X = \mathbb{R}$. В этом случае альтернативы обычно называют **выигрышами** (денежными выигрышами). В теории предпочтений на лотереях не имеет значения, какую именно природу имеют рассматриваемые выигрыши.

Определение 1.

Под **простой лотереей** мы будем понимать пару (X_p, $\boldsymbol{p}$), где X_p — некоторое конечное подмножество множества состояний мира X, $\boldsymbol{p}$ — вектор вероятностей их получения.

В терминах теории вероятностей простая лотерея является простой вероятностной мерой. Понятно, что по определению вероятности

$$p(\boldsymbol{x}) \geqslant 0 \ (\boldsymbol{x}\in X_p) \ \text{ и } \ \textstyle\sum_{\boldsymbol{x}\in X_p} p(\boldsymbol{x}) = 1.$$

Простую лотерею можно представить следующей таблицей:

$p(\boldsymbol{x}_1)$	$p(\boldsymbol{x}_2)$	...	$p(\boldsymbol{x}_k)$
$\boldsymbol{x}_1$	$\boldsymbol{x}_2$	...	$\boldsymbol{x}_k$

Множество всех возможных простых лотерей участника обозначим $\mathcal{P}$. Заметим, что функцию $p(.)$ можно считать заданной на всем множестве X, считая, что $p(\boldsymbol{x}) = 0$, если $\boldsymbol{x} \notin X_p$. Тогда $X_p = \{\boldsymbol{x} \in X \mid p(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$ и без ограничения общности лотерею (X_p, $\boldsymbol{p}$) можно отождествлять с $\boldsymbol{p}$. В дальнейшем будем придерживаться этого упрощения.

Определение 2.

Для любой пары лотерей $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q} \in \mathcal{P}$ и числа $\alpha \in [0,1]$ определим **выпуклую комбинацию** $\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{q}$ как лотерею, множеством исходов которой является объединение множеств исходов рассматриваемых лотерей ($X_p \cup X_q$), а вероятность исхода $\boldsymbol{x}$ рассчитывается по формуле

$$\begin{cases} \alpha\,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha)\,\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in X_p\cup X_q \\ 0, & \boldsymbol{x}\notin X_p\cup X_q \end{cases}.$$

Легко понять, что множество всех простых лотерей $\mathcal{P}$ содержит все выпуклые комбинации своих элементов.

Предложенное определение означает фактически, что оценка лотереи потребителем не зависит от способа ее реализации. То есть в оценке любой лотереи потребитель ориентируется лишь на исходы этой лотереи и вероятности, с которыми эти исходы реализуются. Так две указанные ниже лотереи эквивалентны, поскольку приводят в конечном итоге к одним и тем же исходам с одинаковыми вероятностями этих исходов и поэтому рассматриваются как одна и та же альтернатива.

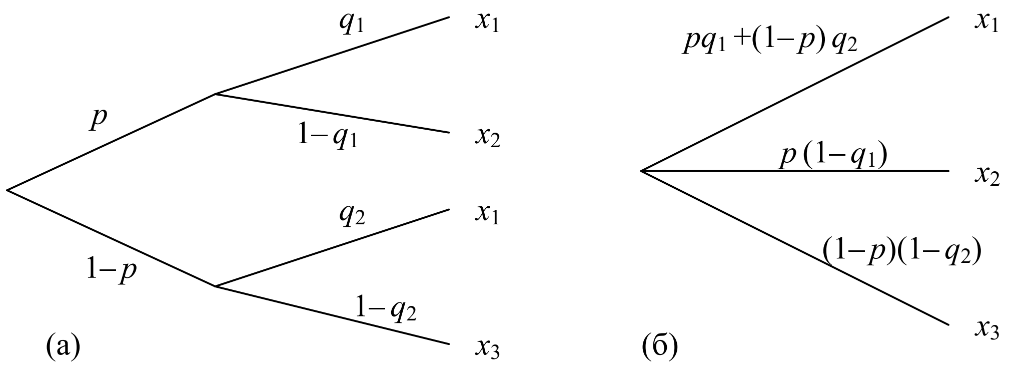


Рисунок 1. Сложная (а) и эквивалентная простая (б) лотерея

На рисунке 1(а) изображена двухэтапная лотерея. На первом этапе потребитель с вероятностью p получает право участвовать в лотерее, в которой исход $\boldsymbol{x}_1$ реализуется с вероятностью q_1, $\boldsymbol{x}_2$ — с вероятностью $1-q_1$, и с вероятностью $1-p$ получает право участвовать в лотерее, при которой с вероятностью q_2 реализуется исход $\boldsymbol{x}_1$ и с вероятностью $1-q_2$ — исход $\boldsymbol{x}_3$. На рисунке 1(б) представлен одноэтапный вариант этой лотереи.

В дальнейшем нам для упрощения выкладок понадобятся некоторые свойства операции выпуклой комбинации лотерей.

Утверждение 1.

Операция выпуклой комбинации лотерей обладает следующими свойствами:

– $\boldsymbol{p}\blacklozenge 1 \blacklozenge \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}$,
– $\boldsymbol{p}\blacklozenge 0 \blacklozenge \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}$,
– $\boldsymbol{p}\blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}\blacklozenge (1-\alpha) \blacklozenge \boldsymbol{p}$,
– $(\boldsymbol{p}\blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q})\blacklozenge \alpha \blacklozenge (\boldsymbol{p}\blacklozenge \gamma \blacklozenge \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p}\blacklozenge (\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma)\blacklozenge \boldsymbol{q}$.

Доказательство:

Доказательство оставляется в качестве упражнения.

■

Предположим, что (нестрогое) отношение предпочтения $\succeq$ потребителя определено не только на множестве элементарных исходов X, но и на более широком множестве простых лотерей $\mathcal{P}$. Как и выше, обозначим через $\succ$ соответствующее ему строгое отношение предпочтения, а через $\sim$ отношение эквивалентности.

Мы предполагаем, что предпочтения участника обладают следующими свойствами:

(A1) Отношение $\succ$ отрицательно транзитивно и асимметрично.

(A2) *Аксиома независимости от посторонних альтернатив*:

Пусть $\boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$ — произвольная лотерея. Тогда для любого α, $0 < \alpha \leqslant 1$ выполняется соотношение $\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{r} \succ \boldsymbol{q}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{r}$.

(A3) *Аксиома исчерпания Архимеда*:

Если $\boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{q} \succ \boldsymbol{r}$, то существуют числа α, β ∈ [0,1], такие что

$$\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{r} \succ \boldsymbol{q} \succ \boldsymbol{p}\blacklozenge\beta\blacklozenge\boldsymbol{r}.$$

Определение 3.

Будем называть функцию полезности $U(.)$, представляющую предпочтения на лотереях, линейной, если для произвольных лотерей $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathcal{P}$ и числа $\alpha \in [0,1]$ верно соотношение

$$U(\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{q}) = \alpha U(\boldsymbol{p}) + (1-\alpha)U(\boldsymbol{q}).$$

Утверждение 2.

Если предпочтения на множестве лотерей представимы линейной функцией полезности ($U(.)$), то эти предпочтения удовлетворяют свойствам (A1)-(A3).

<u>Доказательство</u>:

(A1) Свойство (A1) очевидно.

(A2) (независимость от посторонних альтернатив)

Пусть $\boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{q}$. Тогда $U(\boldsymbol{p}) > U(\boldsymbol{q})$.

Пусть $\boldsymbol{r}$ — произвольная лотерея, α — число, $0 < \alpha \leqslant 1$. Тогда

$$U(\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{r}) = \alpha U(\boldsymbol{p}) + (1-\alpha)U(\boldsymbol{r}) >$$
$$> \alpha U(\boldsymbol{q}) + (1-\alpha)U(\boldsymbol{r}) = U(\boldsymbol{q}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{r}).$$

Поэтому $\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{r} \succ \boldsymbol{q}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{r}$.

(A3) (аксиома исчерпания Архимеда)

Пусть $\boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{q} \succ \boldsymbol{r}$, то есть

$$U(\boldsymbol{p}) > U(\boldsymbol{q}) > U(\boldsymbol{r}).$$

Тогда если

$$\alpha > \frac{U(\boldsymbol{q}) - U(\boldsymbol{r})}{U(\boldsymbol{p}) - U(\boldsymbol{r})},$$

то $\alpha\,(U(\boldsymbol{p}) - U(\boldsymbol{r})) > U(\boldsymbol{q}) - U(\boldsymbol{r})$, откуда по свойству линейности $\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{r} \succ \boldsymbol{q}$. Аналогично, если

$$\beta < \frac{U(\boldsymbol{q}) - U(\boldsymbol{r})}{U(\boldsymbol{p}) - U(\boldsymbol{r})},$$

то $\boldsymbol{q} \succ \boldsymbol{p}\blacklozenge\beta\blacklozenge\boldsymbol{r}$.

■

Если предпочтения участника на лотереях удовлетворяют аксиомам (A1)-(A3), то можно подобрать линейную функцию полезности, которая представляет предпочтения этого участника, притом такая линейная функция полезности единственна. Ниже мы докажем это, используя следующее вспомогательное предположение:

(A4)[1] Множество $\mathcal{P}$ содержит наихудший $\boldsymbol{w}$ и наилучший $\boldsymbol{b}$ элементы:

$$\boldsymbol{w} \succeq \boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{b} \quad \forall\, \boldsymbol{p} \in \mathcal{P}.$$

Для доказательства этого предварительно докажем ряд утверждений. Всюду предполагается, что выполнены свойства (A1)-(A4).

---

[1] Теорема верна и без этого предположения, см. напр. П.Фишберн. Теория полезности для принятия решений. — М.: Наука, 1978. Ниже предлагается доказать это утверждение самостоятельно в виде серии утверждений.

В случае, когда $\boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{w}$, все лотереи из множества $\mathcal{P}$ эквивалентны и построение функции полезности с нужными свойствами не вызывает труда:

$$U(\boldsymbol{p}) = \mathrm{C},$$

где C — произвольное число. (Понятно, что константа — линейная функция.) Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\boldsymbol{w} \succ \boldsymbol{b}$.

Утверждение 3.

Для любой пары лотерей $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, таких что $\boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{q}$, и пары чисел $\alpha, \beta \in [0,1]$ условие

$$\beta > \alpha$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{p} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q} \succ \boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}.$$

<u>Доказательство</u>:

Докажем сначала, что из $\beta > \alpha$ следует $\boldsymbol{p} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q} \succ \boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}$.

В случае $\alpha \neq 0$ рассмотрим лотерею $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p} \blacklozenge \frac{\alpha}{\beta} \blacklozenge \boldsymbol{q}$. Для нее выполнено

$$\boldsymbol{r} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q} = (\boldsymbol{p} \blacklozenge \frac{\alpha}{\beta} \blacklozenge \boldsymbol{q}) \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} \blacklozenge \frac{\alpha}{\beta} \beta \blacklozenge \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}.$$

Так как $\boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{q}$, то по аксиоме (A2) при $\frac{\alpha}{\beta} \in (0,1]$ выполнено

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p} \blacklozenge \frac{\alpha}{\beta} \blacklozenge \boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{p} \blacklozenge \frac{\alpha}{\beta} \blacklozenge \boldsymbol{q} = \boldsymbol{r}.$$

Условие $\boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{r}$ при $\beta \in (0,1]$ позволяет еще раз применить (A2):

$$\boldsymbol{p} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q} \succ \boldsymbol{r} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q},$$

откуда получаем $\boldsymbol{p} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q} \succ \boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}$.

В предыдущем доказательстве нам требовалось, чтобы $\frac{\alpha}{\beta} \neq 0$. В случае $\alpha = 0$ соотношение $\boldsymbol{p} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q} \succ \boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}$ выполнено, так как

$$\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} \blacklozenge 0 \blacklozenge \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q}$$

и кроме того по (A2) имеем $\boldsymbol{q} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q} \prec \boldsymbol{p} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q}$.

Докажем обратное. Пусть для некоторых α и β выполнено $\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q} \prec \boldsymbol{p} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q}$, но при этом $\alpha \geqslant \beta$. Если $\alpha > \beta$, то по только что доказанному $\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q} \succ \boldsymbol{p} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q}$, что противоречит асимметричности строгого отношения предпочтения. Если же $\alpha = \beta$, то $\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{q}$, что противоречит нерефлексивности отношения $\succ$. Таким образом, утверждение доказано.

■

Будем обозначать через $\boldsymbol{f}(\alpha)$ выпуклую комбинацией лучшей и худшей лотерей с коэффициентом $\alpha \in [0,1]$, т.е

$$\boldsymbol{f}(\alpha) = \boldsymbol{b} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{w}.$$

Обозначим множество таких лотерей через $\boldsymbol{f}([0,1])$. Напомним, что мы рассматриваем только случай $\boldsymbol{b} \succ \boldsymbol{w}$. Из определения функции $\boldsymbol{f}(.)$ следует, что она задает взаимоодназначное соответствие между отрезком [0, 1] и множеством $\boldsymbol{f}([0,1])$, поскольку при $\alpha \neq \beta$ $\boldsymbol{f}(\alpha) \neq \boldsymbol{f}(\beta)$. Следующее утверждение показывает, что на основании функции $\boldsymbol{f}(.)$ можно построить функцию полезности.

Утверждение 4.

Для любой лотереи $\boldsymbol{p}$ из $\mathcal{P}$ найдется единственное число $U(\boldsymbol{p}) \in [0,1]$ такое, что справедливо $\boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{p})) \sim \boldsymbol{p}$. Функция $U(.)$ является функцией полезности, представляющей данные предпочтения.

<u>Доказательство</u>:

Для любой лотереи $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$ нам нужно установить, что существует эквивалентная ей лотерея из $\boldsymbol{f}([0,1])$.

Когда $\boldsymbol{p} \sim \boldsymbol{b}$ либо $\boldsymbol{p} \sim \boldsymbol{w}$ доказательство существования числа $U(\boldsymbol{p})$ тривиально: оно равно 1 и 0 соответственно.

Рассмотрим случай $\boldsymbol{w} \prec \boldsymbol{p} \prec \boldsymbol{b}$.

Обозначим множество чисел, соответствующих лотереям из $\boldsymbol{f}([0,1])$, которые лучше $\boldsymbol{p}$, через A^+:

$$A^+ = \{\alpha \in [0,1] \mid \boldsymbol{p} \prec \boldsymbol{f}(\alpha)\}.$$

Аналогично множество чисел, соответствующих лотереям из $\boldsymbol{f}([0,1])$, которые хуже чем $\boldsymbol{p}$, обозначим A^-:

$$A^- = \{\alpha \in [0,1] \mid \boldsymbol{f}(\alpha) \prec \boldsymbol{p}\}.$$

Эти два множества непусты, так как $1 \in A^+$ и $0 \in A^-$.

Так как множества A^+, A^-, непусты и ограничены, то существуют числа

$$\alpha^+ = \inf A^+,\ \alpha^- = \sup A^-.$$

Для этих чисел справедливо соотношение $\alpha^- \leqslant \alpha^+$; в противном случае нашелся бы общий элемент $\alpha \in A^-$, $\alpha \in A^+$, что противоречит нерефлексивности $\succ$.

Покажем, что $\boldsymbol{f}(\alpha^+) \preceq \boldsymbol{p} \preceq \boldsymbol{f}(\alpha^-)$, т.е. $\alpha^+ \notin A^+$ и $\alpha^- \notin A^-$. Предположим противное. Пусть, например, $\boldsymbol{w} \prec \boldsymbol{p} \prec \boldsymbol{f}(\alpha^+)$. В таком случае в силу (A3) существует γ, такое что для лотереи $\boldsymbol{w} \blacklozenge \gamma \blacklozenge \boldsymbol{f}(\alpha^+)$ справедливо соотношение

$$\boldsymbol{w} \blacklozenge \gamma \blacklozenge \boldsymbol{f}(\alpha^+) \succ \boldsymbol{p}.$$

Поскольку

$$\boldsymbol{w} \blacklozenge \gamma \blacklozenge \boldsymbol{f}(\alpha^+) = \boldsymbol{w} \blacklozenge \gamma \blacklozenge (\boldsymbol{b} \blacklozenge \alpha^+ \blacklozenge \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{b} \blacklozenge \alpha^+(1-\gamma) \blacklozenge \boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\alpha^+(1-\gamma)),$$

то это означает, что $\boldsymbol{f}(\alpha^+(1-\gamma)) \succ \boldsymbol{p}$. Значит, $\alpha^+(1-\gamma) \in A^+$, а это противоречит определению числа α^+. Итак, предположение $\boldsymbol{f}(\alpha^+) \succ \boldsymbol{p}$ неверно. Поэтому $\boldsymbol{f}(\alpha^+) \preceq \boldsymbol{p}$. Рассуждения для α^- аналогичны. Таким образом,

$$\boldsymbol{f}(\alpha^+) \preceq \boldsymbol{p} \preceq \boldsymbol{f}(\alpha^-).$$

Если сопоставить это с вытекающим из Утверждения **3** и $\alpha^- \leqslant \alpha^+$ соотношением

$$\boldsymbol{f}(\alpha^-) \preceq \boldsymbol{f}(\alpha^+),$$

то

$$\boldsymbol{f}(\alpha^-) \sim \boldsymbol{p} \sim \boldsymbol{f}(\alpha^+).$$

Таким образом, мы можем выбрать $U(\boldsymbol{p}) = \alpha^+$. Существование числа $U(\boldsymbol{p})$ доказано.

Единственность числа $U(\boldsymbol{p})$ следует из Утверждения **3**.

Теперь покажем, что $U(\boldsymbol{p})$ есть функция полезности. Из Утверждения **3** следует, что из двух лотерей из $\boldsymbol{f}([0,1])$ хуже та, коэффициент которой меньше и обратно:

$$\boldsymbol{f}(\alpha) \prec \boldsymbol{f}(\beta) \Leftrightarrow \alpha < \beta.$$

Для двух произвольных лотерей $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathcal{P}$ соотношение $\boldsymbol{p} \prec \boldsymbol{q}$ эквивалентно тому, что $\boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{p})) \prec \boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{q}))$. Поэтому

$$\boldsymbol{p} \prec \boldsymbol{q} \Leftrightarrow U(\boldsymbol{p}) < U(\boldsymbol{q}).$$

■

Утверждение 5.

Функция полезности $U(.)$, такая что $\boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{p})) \sim \boldsymbol{p}$, является линейной.
Эта функция — единственная (с точностью до линейного преобразования) линейная функция полезности, представляющая данные предпочтения.

Доказательство:

(Линейность)

Мы хотим доказать, что если $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathcal{P}$, $\alpha \in [0,1]$, то выполнено

$$U(\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}) = \alpha U(\boldsymbol{p}) + (1-\alpha)U(\boldsymbol{q}).$$

При $\alpha=0$ и $\alpha=1$ доказываемое очевидно.

Рассмотрим случай $0 < \alpha < 1$.

Пусть утверждение теоремы неверно, например, для некоторых $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathcal{P}$

$$U(\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}) < \alpha U(\boldsymbol{p}) + (1-\alpha)U(\boldsymbol{q}).$$

Тогда можно подобрать числа $0 \leqslant \beta < U(\boldsymbol{p})$ и $0 \leqslant \gamma < U(\boldsymbol{q})$, такие что

$$U(\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}) = \alpha\beta + (1-\alpha)\gamma,$$

откуда

$$\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q} \sim \boldsymbol{f}(\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma).$$

По свойствам операции комбинирования лотерей

$$\boldsymbol{f}(\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma) = \boldsymbol{b} \blacklozenge (\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma) \blacklozenge \boldsymbol{w} =$$
$$= (\boldsymbol{b} \blacklozenge \beta \blacklozenge \boldsymbol{w}) \blacklozenge \alpha \blacklozenge (\boldsymbol{b} \blacklozenge \gamma \blacklozenge \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{f}(\beta) \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{f}(\gamma).$$

Поскольку $\beta < U(\boldsymbol{p})$, то $\boldsymbol{f}(\beta) \prec \boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{p})) \sim \boldsymbol{p}$, и по аксиоме (A2) получим

$$\boldsymbol{f}(\beta) \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{f}(\gamma) \prec \boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{f}(\gamma).$$

Аналогичным образом, поскольку $\gamma < U(\boldsymbol{q})$, то верно соотношение $\boldsymbol{f}(\gamma) \prec \boldsymbol{f}(U(\boldsymbol{q})) \sim \boldsymbol{q}$, и по аксиоме (A2)

$$\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{f}(\gamma) \prec \boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}.$$

Получаем, в противоречие с нерефлексивностью отношения предпочтения $\prec$, цепочку соотношений

$$\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q} \sim \boldsymbol{f}(\beta) \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{f}(\gamma) \prec \boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{f}(\gamma) \prec \boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}.$$

Аналогичным образом можно прийти к противоречию, предположив, что $U(\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}) > \alpha U(\boldsymbol{p}) + (1-\alpha)U(\boldsymbol{q})$. Значит,

$$U(\boldsymbol{p} \blacklozenge \alpha \blacklozenge \boldsymbol{q}) = \alpha U(\boldsymbol{p}) + (1-\alpha)U(\boldsymbol{q}).$$

(Единственность)

Предположим, что $V(.)$ — другая линейная функция полезности. Обозначим

$$V^*(\boldsymbol{p}) = \frac{V(\boldsymbol{p}) - V(\boldsymbol{w})}{V(\boldsymbol{b}) - V(\boldsymbol{w})}.$$

Данное преобразование является линейным. Покажем, что $V^*(\boldsymbol{p}) = U(\boldsymbol{p})$. Поскольку $V(.)$ линейна, то $V^*(\boldsymbol{p})$ также линейна. Кроме того, функции $V^*(.)$ и $U(.)$ совпадают для худшей и лучшей лотерей:

$$V^*(\boldsymbol{w}) = U(\boldsymbol{w}) = 0 \text{ и } V^*(\boldsymbol{b}) = U(\boldsymbol{b}) = 1.$$

Это означает, что функции $V^*(.)$ и $U(.)$ в силу линейности совпадают на $\boldsymbol{f}([0,1])$. Поскольку любая лотерея из $\mathcal{P}$ эквивалентна лотерее из $\boldsymbol{f}([0,1])$, то $V^*(.)$ и $U(.)$ совпадают на любой лотерее из $\mathcal{P}$.

■

Определение 4.

Функция полезности, представляющая предпочтения на лотереях, называется функцией полезности Неймана-Моргенштерна $U(.)$, если существует определенная на множестве исходов функция $u(.)$, такая что полезность любой лотереи рассчитывается как *ожидаемая полезность* ее исходов. Другими словами,

$$U(\boldsymbol{p}) = \sum_{x \in X_p} p(\boldsymbol{x})\, u(\boldsymbol{x}).$$

Функция $u(.)$ называется **элементарной функцией полезности** или **функцией Бернулли**.

Утверждение 6.
Если $U(.)$ является линейной функцией полезности, представляющей предпочтения на множестве простых лотерей $\mathcal{P}$, то она имеет вид Неймана-Моргенштерна.

***Доказательство*:**
Обозначим $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x})$ лотерею в которой $\boldsymbol{x}$ является единственным исходом, т.е.

$$X_p = \{\boldsymbol{x}\}.$$

Определим функцию $u(.)$ на множестве элементарных исходов X по формуле

$$u(\boldsymbol{x}) = U(\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x})).$$

Тогда $U(\boldsymbol{p}) = \sum_{\boldsymbol{x}\in X_p} p(\boldsymbol{x})\, u(\boldsymbol{x})$. Докажем это утверждение по индукции.

Пусть утверждение доказано для лотерей с k исходами, и пусть $\boldsymbol{p}$ — лотерея с k+1 исходом. Пусть $\boldsymbol{x}'$ — один из этих исходов, т.е. $\boldsymbol{x}'\in X_p$. Тогда

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}')\blacklozenge p(\boldsymbol{x}')\blacklozenge \boldsymbol{q},$$

где $\boldsymbol{q}$ — лотерея с $X_q = X_p\backslash \boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x})/(1- p(\boldsymbol{x}'))\ \forall \boldsymbol{x}\in X_q$.

В силу линейности функции $U(.)$

$$U(\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}')\blacklozenge p(\boldsymbol{x}')\blacklozenge \boldsymbol{q}) = p(\boldsymbol{x}')\, u(\boldsymbol{x}') + (1- p(\boldsymbol{x}')U(\boldsymbol{q}).$$

В силу предположения индукции

$$U(\boldsymbol{q}) = \sum_{\boldsymbol{x}\in X_q} q(\boldsymbol{x})\, u(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{x}\in X_q} p(\boldsymbol{x})/(1- p(\boldsymbol{x}'))\, u(\boldsymbol{x}).$$

В итоге получим требуемый результат

$$U(\boldsymbol{p}) = (p(\boldsymbol{x}')\, u(\boldsymbol{x}') + (1- p(\boldsymbol{x}'))\, (\sum_{\boldsymbol{x}\in X_q} p(\boldsymbol{x})/(1- p(\boldsymbol{x}'))\, u(\boldsymbol{x})) =$$
$$= \sum_{\boldsymbol{x}\in X_p} p(\boldsymbol{x})\, u(\boldsymbol{x}).$$

■

Функция $U(\boldsymbol{p})$ определена нами лишь на простых лотереях. Если в дополнение к свойствам **(A1)-(A3)** предположить, что отношение предпочтения $\succ$ определено на множестве всех лотерей, заданных на X, (т.е. борелевских вероятностных мер на множестве X) и непрерывно (в слабой топологии) на этом множестве, то построенную функцию $U(\boldsymbol{p})$ можно определить на любой вероятностной борелевской мере стандартным способом, поскольку множество простых мер является плотным во множестве всех борелевских мер. Читатель может доказать соответствующие утверждения самостоятельно, обращаясь, в случае необходимости, к учебникам по математическому анализу и топологии.

Будем предполагать, что во всех рассматриваемых ниже ситуациях все необходимые условия существования функции полезности Неймана-Моргенштерна выполнены. Заметим, что, в соответствии с определением функции Н.-М., ее можно записать в следующем виде

$$U(\boldsymbol{p}) = \mathsf{E}(u(\tilde{\boldsymbol{x}})),$$

где $\tilde{\boldsymbol{x}}$ — случайная величина, определяемая лотереей $\boldsymbol{p}$ (принимающая значения $\boldsymbol{x} \in X_p$ с вероятностями $p(\boldsymbol{x})$), E — оператор математического ожидания. Эти обозначение будем использовать и в дальнейшем.

<u>Тесты и задачи для самостоятельного решения</u>

1. Пусть отношение предпочтения на множестве лотерей $\succ$ транзитивно и выполнено свойство (A2). Покажите, что если $\boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r} \succ \boldsymbol{s}$, то $\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{r} \succ \boldsymbol{q}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{s}$ ($\alpha\in[0,1]$).

2. Пусть отношение предпочтения на множестве лотерей $\succ$ нерефлексивно и выполнено свойство (A2). Покажите, что если $\boldsymbol{p} \sim \boldsymbol{q}$, то $\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{q} \sim \boldsymbol{q}$ ($\alpha\in[0,1]$).

3. Пусть $\succ$ — отношение предпочтения на множестве лотерей и выполнены свойства (A1)-(A3). Покажите, что если $\boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{r} \succeq \boldsymbol{q}$, то найдется единственное $\alpha\in[0,1]$, такое что $\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{q} \sim \boldsymbol{r}$.

4. Пусть $\succ$ — отношение предпочтения на множестве лотерей и выполнены свойства (A1)-(A3). Покажите, что если $\boldsymbol{p} \sim \boldsymbol{q}$, и $\boldsymbol{r}$ — произвольная лотерея, то $\boldsymbol{p}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{r} \sim \boldsymbol{q}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{r}$ ($\alpha\in[0,1]$).

5. Покажите, что функция полезности Неймана-Моргенштерна, представляющая предпочтения на множестве лотерей, существует тогда и только тогда, когда выполнены свойства (A1)-(A3), и при этом функция единственна с точностью до линейного преобразования.
Указание: Пусть $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ — две лотереи, такие что $\boldsymbol{p} \succ \boldsymbol{q}$. Тогда, как было показано выше, существует функция полезности Н.-М., определенная на "отрезке" $\{\boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{r} \succeq \boldsymbol{q}\}$. Пусть теперь $\boldsymbol{s}$ — любая лотерея. Тогда, по отрицательной транзитивности $\succ$, выполняется одно из трех соотношений:

$\boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{s} \succeq \boldsymbol{q}$

$\boldsymbol{s} \succeq \boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{q}$

$\boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{q} \succeq \boldsymbol{s}$.

Предположим, что функция полезности Н.-М., представляющая отношение предпочтения, определена на отрезке $\{\boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{r} \succeq \boldsymbol{q}\}$ и пусть $\boldsymbol{s}$ удовлетворяет соотношению: $\boldsymbol{s} \succeq \boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{q}$ ($\boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{q} \succeq \boldsymbol{s}$) . Тогда существует (и единственно) число α (β) такое, что

$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{s}\blacklozenge\alpha\blacklozenge\boldsymbol{q}$ ($\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}\blacklozenge\beta\blacklozenge\boldsymbol{s}$)

Определим $U(.)$ в последних двух случаях на основе соотношений:
$U(\boldsymbol{p}) = \alpha\, U(\boldsymbol{s}) + (1-\alpha)U(\boldsymbol{q})$ ($U(\boldsymbol{q}) = \beta\, U(\boldsymbol{p}) + (1-\beta)U(\boldsymbol{s})$)
Демонстрация линейности определенной таким образом функции в значительной степени воспроизводит этапы доказательства теоремы в частном случае, когда $U(.)$ определена лишь на "отрезке" $\{\boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{p} \succeq \boldsymbol{r} \succeq \boldsymbol{q}\}$.

Отношение к риску

В соответствии со свойствами предпочтений можно разделить экономических агентов на следующие три группы в зависимости от их отношения к риску:
– рискофилы (положительно относящиеся к риску): $\mathsf{E}(u(\tilde{x})) > u(\mathsf{E}(\tilde{x}))$,
– рискофобы (отрицательно относящиеся к риску): $\mathsf{E}(u(\tilde{x})) < u(\mathsf{E}(\tilde{x}))$,
– нейтральные по отношению к риску: $\mathsf{E}(u(\tilde{x})) = u(\mathsf{E}(\tilde{x}))$.
Здесь $\tilde{\boldsymbol{x}}$ — любая "нетривиальная" случайная величина (формально это означает, что вероятность того, что она не совпадает со своим мат. ожиданием не равна нулю).

В дальнейшем мы будем рассматривать только поведение рискофоба. (Анализ поведения рискофила и потребителя, нейтрального по отношению к риску представляется читателю).

Заметим, что соотношение $\mathsf{E}(u(\tilde{x})) \leqslant u(\mathsf{E}(\tilde{x}))$ (так называемое неравенство Йенсена) выполнено тогда и только тогда, когда функция вогнута. Фактически это и есть определение вогнутой функции. Строгое неравенство $\mathsf{E}(u(\tilde{x})) < u(\mathsf{E}(\tilde{x}))$ для произвольной "нетривиальной" случайной величины $\tilde{x}$ выполнено тогда и только тогда, когда функция строго вогнута.

При анализе поведения рискофоба ограничимся рассмотрением инвестиционных решений, когда множество элементарных исходов — подмножество множества действительных чисел; элементарные исходы (выигрыши по лотереям) будем интерпретировать как денежные.

Пусть имеется два актива: безрисковый, не приносящий дохода (это могут быть, например, деньги в ситуации, когда инфляции нет и она не ожидается) и один рисковый с нормой доходности $\tilde{R}$ и ожидаемой нормой доходности $\mathsf{E}\tilde{R}$. У потребителя имеется сумма w, из которой он сумму a инвестирует в рисковый актив, а сумму $w - a$ — в безрисковый. Доходность полученного портфеля — случайная величина

$$\tilde{w} = w - a + (1+\tilde{R})\, a = w + a\, \tilde{R}.$$

Ожидаемая полезность такого портфеля равна

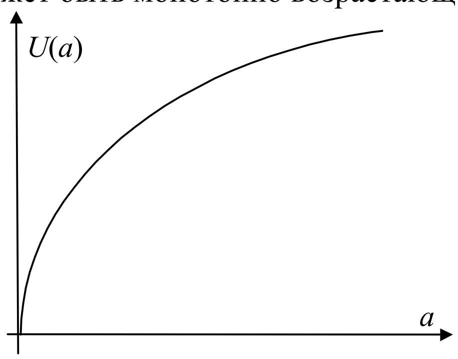
$$U(a) = \mathsf{E}(u(w + a\tilde{R})) = \sum_i p_i u_i(w + aR_i).$$

Мы предполагаем, что финансовый рынок совершенен, т.е. доходность активов не зависит от поведения рассматриваемого экономического агента, и что можно покупать активы в любых количествах без учета бюджетного ограничения («открытая» позиция по рисковым активам).

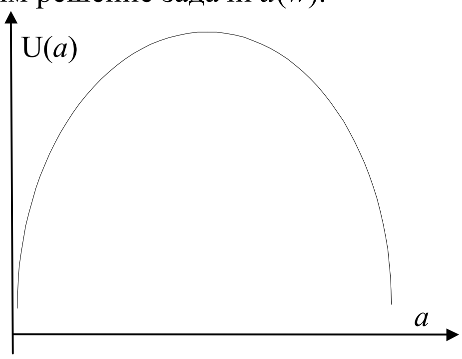
Поведение инвестора описывается следующей задачей:

$$U(a) \to \max$$
$$a \geqslant 0.$$

Кроме того, предполагается, что оптимальный портфель существует, то есть $U(a)$ не может быть монотонно возрастающей. Обозначим решение задачи $a(w)$.



1) Оптимальный портфель не существует



2) Oï òèì àëüí û é ï î ðòô åëü существует

Решение распадается на два случая: $\mathsf{E}\,\tilde{R} \leqslant 0$ и $\mathsf{E}\,\tilde{R} > 0$.

Найдем производную $U(a)$ в точке $a = 0$:

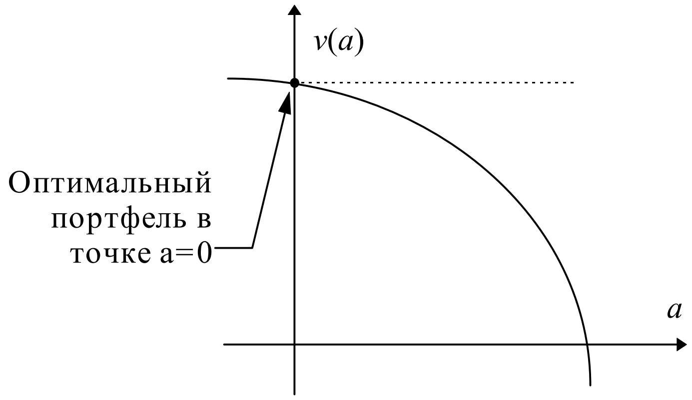
$$U'(a) = \mathsf{E}(u'(w + a\tilde{R})\tilde{R})$$

Вторая производная $U''(a) = \mathsf{E}(u''(w + a\tilde{R})\tilde{R}^2) < 0$, так как мы знаем, что вторая производная функции полезности рискофоба отрицательна в любой точке.

Если $a = 0$ — решение, то должно быть выполнено $U'(0) \leqslant 0$. Поскольку производная в нуле равна $U'(0) = \mathsf{E}(u'(w)\,\tilde{R}) = u'(w)\,\mathsf{E}\,\tilde{R}$, и $u'(w) > 0$, то $\mathsf{E}\,\tilde{R} \leqslant 0$.

С другой стороны, если $\mathsf{E}\tilde{R} \leqslant 0$, то $U'(0) \leqslant 0$. Так как $U''(a) < 0$, то $U'(a) < 0\ \forall a > 0$ и $U(a) < U(0)\ \forall a > 0$. Следовательно, $a = 0$ — решение.

Таким образом, $a(w) = 0 \Leftrightarrow \mathsf{E}\,\tilde{R} \leqslant 0$.



Если $\mathsf{E}\tilde{R} > 0$, то решение (в предположении, что оно существует) должно быть во внутренней точке ($a > 0$). Так как мы рассматриваем рискофоба, то необходимое и достаточное условие оптимальности портфеля имеет вид

$$\mathsf{E}(u'(w + a\tilde{R})\tilde{R}) = 0.$$

Для оптимальных портфелей

$$\mathsf{E}(u'(w + a(w)\tilde{R})\tilde{R}) \equiv 0.$$

В зависимости от того, как меняется инвестиционное поведение при изменении имеющиеся для инвестиций средств с w_1 до w_2, можно проранжировать поведение рискофобов по их степени неприятия риска.

Рассмотрим лотерею, в которой участник получает (дополнительно к w) выигрыш x_1 с вероятностью p (где $p \in (0,1)$), и x_2 с вероятностью $1-p$. Обозначим соответствующую случайную величину через $\tilde{x}$. Имеет смысл принять участие в лотерее лишь в том случае, если

$$\mathsf{E}(u(w + \tilde{x})) \geqslant \mathsf{E}\, u(w).$$

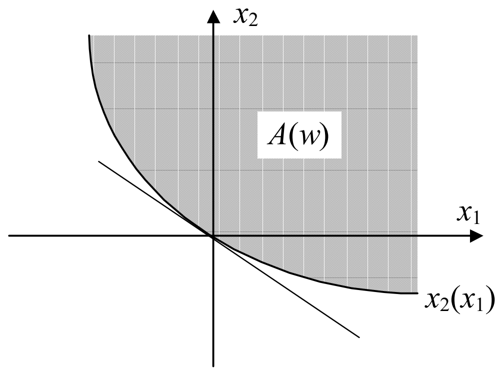
т.е.

$$p\, u(w + x_1) + (1-p)\, u(w + x_2) \geqslant u(w).$$

Обозначим множество всех таких лотерей через

$$A(w) = \{ (x_1, x_2) \mid p\, u(w + x_1) + (1-p)\, u(w + x_2) \geqslant u(w)\}.$$

Нарисуем на плоскости (x_1, x_2) множество $A(w)$. Потребитель будет участвовать во всех лотереях, расположенных в I квадранте, и точно не будет участвовать в лотереях в III квадранте, а вот в II и IV приемлемы лишь частично. Если элементарная функция полезности $u(.)$ вогнута, то множество $A(w)$ выпукло. (Докажите это.)



Для любой лотереи, лежащей на границе этого множества, выполняется:

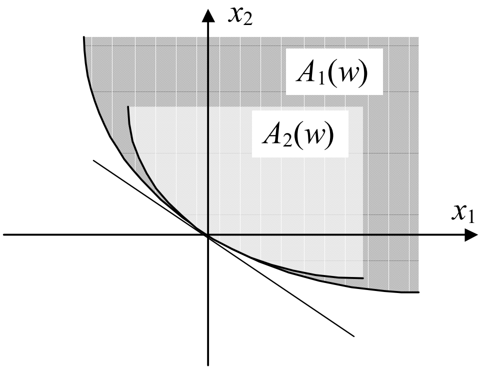
$$pu(w + x_1) + (1 - p)\, u(w + x_2) = u(\omega) \qquad (1)$$

Это уравнение задает зависимость $x_2 = x_2(x_1)$. Подставим это в (1) и продифференцируем по x_1 в точке 0. Используя, тот факт, что $x_2(0) = 0$ получим

$$pu'(w) + (1 - p)\, u'(w)\, x'_2(0) = 0,$$

Это уравнение описывает касательную к $A(w)$ в точке (0,0). Эта касательная имеет наклон $-\dfrac{p}{1-p}$. Поскольку выпуклое множество лежит выше своей касательной, то точки лежащие ниже этой касательной не принадлежат $A(w)$. Таким образом, если x_2 будет меньше, чем $-\dfrac{p}{1-p}x_1$, то участник заведомо не примет участия в такой лотереи (какова бы ни была вероятность p).

Рассмотрим двух рискофобов. Пусть первый из них принимает лотереи, принадлежащие множеству $A^1(w)$, а второй — $A^2(w)$. Если $A^2(w) \subset A^1(w)$ (строгое включение), то естественно считать, что из этих двух рискофобов второй характеризуется большим неприятием риска, чем первый.



Если ни одно из включений $A^2(w) \subset A^1(w)$ и $A^1(w) \subset A^2(w)$ не выполнено, то мы не можем проранжировать рассматриваемых участников, используя данное правило.

Продифференцируем выражение (1) по x_1 дважды в точке 0. Получаем

$$p\,u''(w) + (1-p)\,[\,u''(w)\,(x'_2(0))^2 + u'(w)\,x''_2(0)] = 0$$

Подставив $x'_2(0) = -\dfrac{p}{1-p}$, получим $x''_2(0) = -\dfrac{u''(w)}{u'(w)}\dfrac{p}{(1-p)^2}$.

Мы убедились, что уравнения границ множеств $A^1(w)$ и $A^2(w)$ по первым производным всегда совпадают, а по вторым могут различаться. Если $x''_2(0)$ у первого меньше, чем у второго, то в окрестности точки (0,0) $A^2(w)$ содержится в $A^1(w)$. (Понятно, что глобально это может не выполняться). Поэтому величину $-\dfrac{u''(w)}{u'(w)}$ можно рассматривать как локальную меру неприятия риска.

Определение 5.
Мерой отношения к риску Эрроу-Пратта называется величина

$$r(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}.$$

В терминах меры Эрроу-Пратта из двух участников можно считать, что тот участник характеризуется большим неприятием риска, у которого мера Эрроу-Пратта всегда больше.

Утверждение 7.
Если у двух участников меры неприятия риска $r^1(.)$ и $r^2(.)$ таковы, что $\forall w$ выполнено $r^1(w) < r^2(w)$, то $\forall w$ выполнено $A^2(w) \subseteq A^1(w)$.

Доказательство:
Доказательство оставляется в качестве упражнения.
■

Пусть ε — некоторая "нетривиальная" случайная величина с нулевым мат. ожиданием ($\mathsf{E}(\varepsilon) = 0$), тогда, как уже говорилось выше, для рискофоба выполнено $\mathsf{E}\, u\,(w+\varepsilon) < \mathsf{E}\, u\,(w)$. Плату за риск $\pi_u(w,\varepsilon)$ можно определить как максимальную потерю в доходе, на которую согласен данный участник, чтобы избежать риска (не участвовать в такой лотерее). Чтобы не загромождать запись, будем опускать аргумент w из записи величины платы за риск.

Определение 6.

Плата за риск $\pi_u(\varepsilon)$ определяется из соотношения

$$\mathsf{E}\, u\,(w+\varepsilon) = u\,(w-\pi_u(\varepsilon)).$$

Для любого рискофоба плата за риск — величина неотрицательная. Естественно считать, что в терминах платы за риск из двух участников тот характеризуется большим неприятием риска, у которого плата за риск всегда больше.

Можно предложить еще один способ ранжирования рискофобов по их отношению к риску — "степень вогнутости" элементарной функцией полезности. Можно считать, что $u\,(x)$ “более вогнута”, чем $v(x)$, если существует строго вогнутая строго возрастающая функция G такая, что $u\,(x) = G(v(x))$, тогда участник с элементарной функцией полезности $u\,(x)$ характеризуется большим неприятием риска.

Оказывается, что все предложенные способы ранжирования эквивалентны, о чем свидетельствует следующее утверждение.

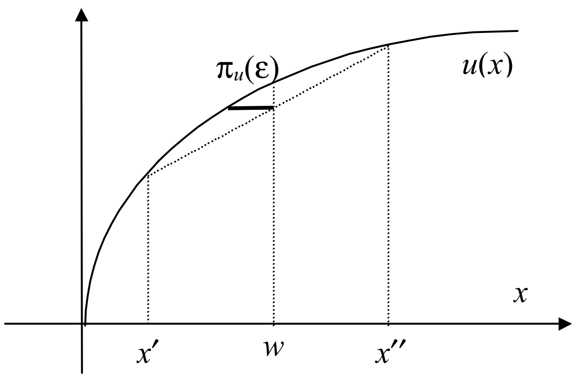
Утверждение 8. (Теорема Пратта).

Пусть два рискофоба характеризуются строго возрастающими элементарными функциями полезности $u\,(x)$ и $v(x)$. Тогда следующие три условия эквивалентны:

$r_u(w) > r_v(w)$ $\forall w$, где $r_u(w)$, $r_v(w)$ — меры отношения к риску Эрроу-Пратта.

Существует строго вогнутая строго возрастающая функция G такая, что $u\,(x) = G(v(x))$.

Для всех случайных переменных ε, с нулевым мат. ожиданием ($\mathsf{E}\varepsilon = 0$) и ненулевой дисперсией ($\mathsf{E}\varepsilon^2 \neq 0$) выполнено $\pi_u(\varepsilon) > \pi_v(\varepsilon)$.



Плата за риск $\pi_u(\varepsilon,\omega)$

***<u>Доказательство</u>*:**

1 ⇒ 2. Определим G для любого x принадлежащего области значений функции v следующим образом:

$$G(x) = u(v^{-1}(x)).$$

(Поскольку v строго монотонна, то она обратима.)

Мы так определили функцию $G(.)$, что

$$u(w) = G(v(w)), \forall\, w \qquad (2)$$

Продифференцируем последнее соотношение:

$$u'(w) = G'(v(w))\, v'(w). \qquad (3)$$

Так как $v'(w) > 0$ и $u'(w) > 0$, то $G'(v(w)) > 0$, значит G строго монотонно возрастает. Продифференцируем еще раз:

$$u''(w) = G''(v(w))\, v'(w) + G'(v(w))\, v''(w). \qquad (4)$$

Поделив (4) на (3) , получим

$$-r_u(w) = -r_v(w) + \frac{G''(v(\omega))}{G'(v(\omega))}\, v'(w), \text{ то есть}$$

$$r_v(w) - r_u(w) = \frac{G''(v(\omega))}{G'(v(\omega))}\, v'(w).$$

Но $r_v(w) - r_u(w) < 0$, $v'(w) > 0$, $G'(v(w)) > 0$, следовательно, $G''(v(w)) < 0$, то есть функция G строго вогнута.

2 ⇒ 3. Напомним определение вогнутости функции: функция $f(x)$ вогнута, если для любого набора чисел $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$ верно соотношение: $f(\sum_i \alpha_i x_i) \geqslant \sum_i \alpha_i f(x_i)$. Для строго вогнутой функции для любого набора чисел $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$, таких что по крайней мере два из них не равны нулю, верно соотношение: $f(\sum_i \alpha_i x_i) > \sum_i \alpha_i f(x_i)$.

Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ таковы, что $u(x) = G(v(x))$. Тогда для случайной величины ε:

$$u(w - \pi_u(\varepsilon)) = \mathsf{E}\, u(w + \varepsilon) = \mathsf{E}\, G(v(w + \varepsilon)) <$$
$$G(\mathsf{E}\, v(w + \varepsilon)) = G(v(w - \pi_v(\varepsilon)) = u(w - \pi_v(\varepsilon)).$$

Здесь мы использовали неравенство Йенсена в строгой форме.

Таким образом, $u(w - \pi_u(\varepsilon)) < u(w - \pi_v(\varepsilon))$, а так как $u(x)$ монотонно возрастает, то из этого соотношения следует, что $w - \pi_u(\varepsilon) < w - \pi_v(\varepsilon)$, то есть $\pi_u(\varepsilon) > \pi_v(\varepsilon)$.

3 ⇒ 1. Пусть ε — случайная величина с нулевым мат. ожиданием ($\mathsf{E}\varepsilon = 0$). Рассмотрим семейство случайных величин $t\varepsilon$ и определим $\pi(t)$ из соотношения:

$$u(w - \pi(t)) = \mathsf{E}\, u(w + t\varepsilon) \qquad (5)$$

Покажем, что для достаточно малых t $\pi(t)$ пропорциональна мере Эрроу-Пратта, что и докажет соответствующее утверждение.

Предположим, что функция $\pi(t)$ — дважды непрерывно дифференцируема. Справедливо соотношение

$$\pi(t) = \pi(0) + t\,\pi'(0) + \frac{1}{2!} t^2\, \pi''(0) + o(t^2).$$

Покажем, что первые два слагаемых в правой части равны нулю. Очевидно, что $\pi(0) = 0$. Дважды продифференцируем (5) по t:

$$-u'(w - \pi(t))\, \pi'(t) = \mathsf{E}\, u'(w + t\varepsilon)\varepsilon, \qquad (6)$$
$$-u'(w - \pi(t))\, \pi''(t) + u''(w - \pi(t))\, (\pi'(t))^2 = \mathsf{E}\, u''(w + t\varepsilon)\varepsilon^2. \qquad (7)$$

При $t = 0$ из (6) имеем:

$$-u'(w)\, \pi'(0) = \mathsf{E}\, u'(w)\,\varepsilon = u'(w)\, \mathsf{E}\,\varepsilon = 0.$$

Поскольку $u'(w)$ не может быть равной нулю (напомним, что мы предполагаем монотонность $u(.)$), то $\pi'(0) = 0$.

Из (7) при $t = 0$ получаем:

$$-u'(w)\, \pi''(0) = u''(w)\, \mathsf{E}\,\varepsilon^2 = u''(w)\,\sigma^2,$$

откуда $\pi''(0) = r_u(w)\,\sigma^2$.

Подставим полученные результаты в ряд Тейлора

$$\pi(t) = r_u(w)\, \frac{t^2\sigma^2}{2} + o(t^2). \qquad (8)$$

Пусть для каких-то u, v выполняется $\pi_u(\varepsilon) > \pi_v(\varepsilon)\ \forall\varepsilon$, тогда при достаточно малом t $\pi_u(t) > \pi_v(t)$, и из (8) имеем $r_u > r_v$.

■

Введенная мера Эрроу-Пратта называется абсолютной мерой Эрроу-Пратта. Кроме того, рассматривают относительную меру Эрроу-Пратта, которая определяется по формуле:

$$-\frac{u''(w)\,w}{u'(w)}.$$

Относительная мера Эрррoу-Пратта является эластичностью предельной полезности (по доходу).

Меры Эррроу-Пратта являются полезными инструментами анализа поведения инвестора в условиях риска, т.к. в их терминах получаются ответы на стандартные вопросы сравнительной статики: как изменяется структура инвестиционного портфеля при изменении размера инвестиций, доходностей активов и т.д. А к проблемам сравнительной статики сводятся многие проблемы прикладной экономики: характер спроса на деньги в портфельной теории формирования спроса на деньги, влияние налогообложения и т.д.

В терминах (абсолютной) меры Эрроу-Пратта можно охарактеризовать спрос на рисковый актив как функцию величины инвестиций в рассматриваемый портфель из двух активов. Мы предполагаем, что $\mathsf{E}\,\tilde{R} > 0$, т.е. что решение внутреннее ($a\,(w) > 0$).

Утверждение 9.

Если мера Эрроу-Пратта $r\,(w)$ убывает, то рисковый актив является нормальным благом, т.е.

$$r'(w) < 0 \Rightarrow a'(w) > 0.$$

(Аналогично можно показать, что если $r'(w) > 0$, то $a'(w) < 0$, и если $r'(w) = 0$, то $a'(w) = 0$.)

Доказательство:

Пусть $r(w)$ убывает.

Условие оптимальности портфеля имеет вид

$$\mathsf{E}\,(u'(w + a(w)\,\tilde{R})\,\tilde{R}) = 0.$$

Продифференцируем его по ω:

$$\mathsf{E}\,(u''(w + a(w)\,\tilde{R})\,\tilde{R}\,(1 + a'(w)\,\tilde{R})) = 0.$$

По свойствам оператора мат. ожидания

$$\mathsf{E}\,(u''(w + a(w)\,\tilde{R})\,\tilde{R}) = -\,a'(w)\,\mathsf{E}\,(u''(w + a(w)\,\tilde{R})\,\tilde{R}^2),$$

откуда

$$a'(w) = -\frac{\mathrm{E}\,(u''(w + a(w)\,\tilde{R})\,\tilde{R})}{\mathrm{E}\,(u''(w + a(w)\,\tilde{R})\,\tilde{R}^2)}.$$

Ясно, что знаменатель здесь меньше нуля, так как в силу вогнутости функции полезности $u''(w + a(w)\,\tilde{R}) < 0$. Покажем, что числитель больше нуля.

Рассмотрим случайную величину $\tilde{R}$: она имеет и положительные, и отрицательные реализации. Рассмотрим случай $\tilde{R} = R > 0$. Тогда в силу убывания функции $r\,(.)$ $r\,(w + a(w)R) < r\,(w)$. По определению меры Эрроу-Пратта

$$r\,(w + a(w)R) = -\frac{u''(w + a(w)R)}{u'(w + a(w)R)} < r\,(w)$$

Умножив последнее неравенство на знаменатель и на R, получаем:

$$u''(w + a(w)R)\,R > -\,r\,(w)\,u'(w + a(w)R)\,R.$$

Легко видеть, что при $\tilde{R} = R < 0$ это неравенство тоже верно. Возьмем мат. ожидание от обеих частей:

$$\mathsf{E}\,(u''(w + a(w)\,\tilde{R})\,\tilde{R}) > -\,r\,(w)\,\mathsf{E}\,(u'(w + a(w)\,\tilde{R})\,\tilde{R}).$$

Так как из условия оптимальности $\mathsf{E}\,(u'(w + a(w)\,\tilde{R})\,\tilde{R}) = 0$, то имеем

$$\mathsf{E}\,(u''(w + a(w)\,\tilde{R})\,\tilde{R}) > 0.$$

Итак, доказано, что если $r'(w) < 0$, то $a'(w) > 0$, другими словами, рисковый актив является нормальным благом.

■

Отметим, однако, что это свойство не выполняется для случая с двумя и более рисковыми активами.

Пусть α_i — доля инвестиций в i-й рисковый актив, α_0 — доля инвестиций в безрисковый актив[2]. Пусть $\tilde{R}_i$ — доходность рискового актива, R_0 — доходность безрискового актива.

Доходность портфеля, в который инвестируется денежная сумма w, — это случайная величина, которая может быть вычислена следующим образом:

$$\tilde{w} = (\alpha_0 R_0 + \sum \alpha_i \tilde{R}_i)\, w,$$

Если предпочтения инвестора на соответствующих лотереях представляются функцией полезности $u(.)$ и инвестор может взять взаймы под процент R_0–1 в неограниченных размерах, задача выбора оптимального портфеля будет иметь вид:

$$\mathsf{E}\, u(\alpha_0 R_0 + \sum \alpha_i \tilde{R}_i)\, w) \to \max_{\alpha_0,\, \alpha_i}$$

$$\alpha_0 + \sum \alpha_i = 1$$

$$\alpha_i \geqslant 0$$

Исключив α_0, преобразуем задачу инвестора к виду

$$\mathsf{E}\, u(R_0 + \sum \alpha_i (\tilde{R}_i - R_0)\, w) \to \max_{\alpha_i \geqslant 0}$$

Условие оптимальности первого порядка этой задачи

$$\mathsf{E}\, u'(\tilde{w})(\tilde{R}_i - R_0) = 0,$$

или

$$\mathsf{E}\, u'(\tilde{w})\tilde{R}_i = R_0\, \mathsf{E}\, u'(\tilde{w})\ \forall i.$$

В силу свойств функции $u(.)$, оно является достаточным условием оптимальности портфеля.

По определению ковариации для двух случайных величин ξ и η выполнено $\mathsf{E}(\xi\eta) = \mathsf{cov}(\xi,\eta) + \mathsf{E}(\xi)\mathsf{E}(\eta)$. С учетом этого соотношения условия оптимальности можем записать в виде

$$\mathsf{E}\, \tilde{R}_i = R_0 - \frac{\mathsf{cov}(u'(\tilde{w}), \tilde{R}_i)}{\mathsf{E}\, u'(\tilde{w})}.$$

Полученное соотношение означает, что включение актива в оптимальный портфель определяется не только его доходностью, но и величиной его корреляции с доходностью всего портфеля.

Так, например, у страховых полисов ожидаемая доходность, как правило, меньше нуля, но они включаются в портфель рискофоба, так как их доходность отрицательно коррелирует с ожидаемым доходом.

<u>Тесты и задачи для самостоятельного решения</u>

1. Покажите, что если абсолютная мера Эрроу-Пратта неприятия риска убывает, то $u''' \leqslant 0$. Покажите, что обратное неверно.

---

[2] Понятно, что в любой портфель рассматриваемого типа будет включен лишь один безрисковый актив (актив с максимальной доходностью). Поэтому предположение о единственности безрискового активы не ограничивает общности.

2. Приведите примеры элементарной функции полезности с возрастающей, убывающей и постоянной абсолютной и относительной мерой Эрроу-Пратта.

3. Покажите, что при увеличении объема инвестиций доля инвестиций в рисковый актив (в сумме инвестиций в оптимальный портфель) постоянна (возрастает, убывает), если относительная мера Эрроу-Пратта убывает (возрастает, постоянна).

4. Покажите, что в первом приближении премия за риск равна

$$r(w)\sigma^2/2,$$

где $r(.)$ — абсолютная мера Эрроу-Пратта, а σ^2 — дисперсия лотереи.

5. Пусть на рынке доступны лишь два актива – рисковый и безрисковый. Как изменяется величина вложений в рисковый актив при росте суммы инвестиций, если предпочтения инвестора представляются функцией полезности Н.-М. с элементарной функцией полезности $u(\omega)$?

Решить задачу при

(a) $u(w) = \sqrt{w}$; (b) $u(w) = -\mathrm{e}^{-aw}$; (c) $u(w) = -\dfrac{1}{w}$;

(d) $u(w) = \ln w$; (e) $u(w) = a\,w - b\,w^2$; (f) $u(w) = a\sqrt{w} + b\,w$.

6. Рассмотрим следующую игру: Если игрок называет число x, то получает $w + x$ с вероятностью 1/3 и $w - x$ с вероятностью 2/3. Какое число назовет рискофоб, предпочтения которого описываются функцией полезности Н.-М. с элементарной функцией полезности:

(a) $u(w) = \sqrt{w}$; (b) $u(w) = -\mathrm{e}^{-aw}$; (c) $u(w) = -\dfrac{1}{w}$;

(d) $u(w) = \ln w$; (e) $u(w) = a\,w - b\,w^2$; (f) $u(w) = a\sqrt{w} + b\,w$.

7. Некто, чьи предпочтения на лотереях описываются функцией полезности Н.-М. с элементарной функцией полезности $u(w) = \sqrt{w}$, располагает суммой денег ω рублей. Ему предлагают приобрести лотерейный билет, выигрывающий x рублей с вероятностью 1/2. Пусть p — максимальная цена, которую он готов уплатить за лотерейный билет.

(1) Чему равна p при $w = 9$ и $x = 16$?

(2) Покажите, что p

растет при увеличении величины выигрыша x.

растет при увеличении суммы денег w.

не может превышать величину $x/4$ рублей.

8. Пусть рискофоб, предпочтения которого описываются функцией полезности Неймана-Моргенштерна с элементарной функцией полезности $u(w) = \sqrt{w}$, владеет суммой денег w рублей и лотерейным билетом, выигрывающим x рублей с вероятностью 1/2. Покажите, что при уменьшении x цена, за которую он готов продать этот лотерейный билет, стремиться к величине ожидаемого (для данного рискофоба) выигрыша по этому билету.

9. Пусть в ситуации с двумя активами, рассмотренной выше, $\alpha(R_0)$ — оптимальная доля вложений в рисковый актив как функция доходности безрискового актива. Покажите, что если абсолютная мера Эрроу-Пратта растет ($r'(.) > 0$) и решение внутреннее ($0 < \alpha(R_0) <$

1), то $\frac{\mathrm{d}\alpha(R_0)}{\mathrm{d}R_0}$>0, т.е. уменьшение доходности безрискового актива приводит к увеличению доли вложений в рисковый актив.

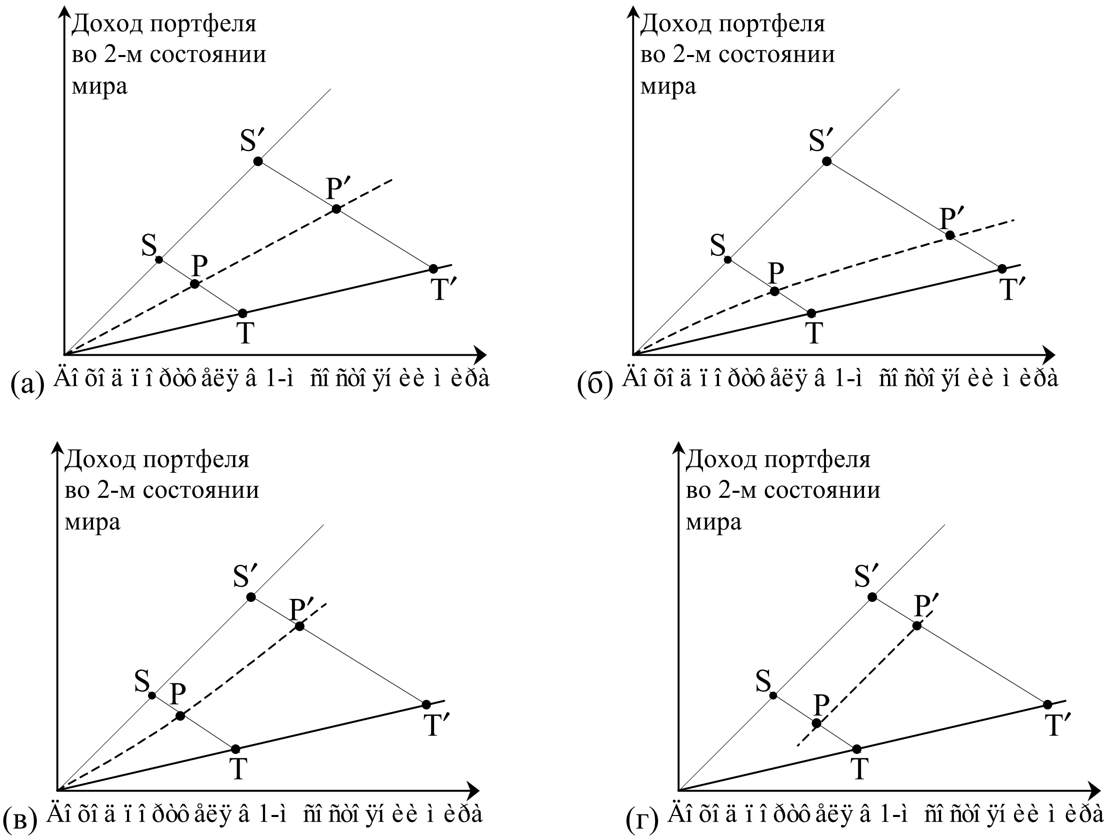
Указание:

Покажите, продифференцировав условие первого порядка, что

$$\frac{\mathrm{d}\alpha(R_0)}{\mathrm{d}R_0}=\frac{\mathsf{E}\,(u'(\tilde{w}))-w(1-\alpha(R_0))\mathsf{E}\,(u''(\tilde{w})(\tilde{R}-R_0))}{w\mathsf{E}\,(u''(\tilde{w})(\tilde{R}-R_0)^2)}.$$

Отсюда следует требуемый результат, поскольку $\mathsf{E}\,(u''(\tilde{\omega})(\tilde{R}-R_0))\leqslant 0$ (вследствие того, что $r'(.)>0$).

10. Предположим, что (в мире с двумя состояниями) имеется один рисковый (с нормой доходности $\tilde{R}$) и один не приносящий дохода безрисковый актив. Охарактеризуйте в терминах относительной и абсолютной меры неприятия риска Эрроу-Пратта (эластичности по богатству спроса на рисковый актив) представленные на рисунке возможные структуры оптимальных портфелей при разных уровнях богатства. Линия PP′ представляет совокупность фактических портфелей (при разных уровнях инвестиций в портфель), SS′ (TT′) — совокупность портфелей при условии, что портфели содержат лишь безрисковые (рисковые) активы. Линии ST (S′T′) представляют совокупность допустимых портфелей при данном уровне инвестиций.



11. Как измениться структура оптимального портфеля инвестора–рискофоба, если ему доступны не приносящий дохода безрисковый актив и рисковый актив и норма доходности рискового актива изменяется следующим образом:

(а) $\tilde{R}_1=(1-h)\tilde{R}$, $h\in[0,1]$;

(б) $\tilde{R}_1=\tilde{R}+h(\tilde{R}-\bar{R})=(1+h)\tilde{R}-h\bar{R}$, где $\bar{R}=\mathsf{E}\tilde{R}$, $h\in[0,1]$

Проинтерпретируйте полученные результаты.

Проиллюстрируйте анализ для простого случая, когда есть всего два состояния природы, на диаграмме (в системе координат «богатство в первом состоянии» — «богатство во втором состоянии»)[3].

12. Докажите, что в ситуации, когда инвестору доступны приносящий доход безрисковый и рисковый активы, налог на валовой доход (от портфельных инвестиций) увеличивает (уменьшает, оставляет постоянным) частный риск, если эластичность по доходу спроса на рисковый актив положительна (отрицательна, постоянна). Проиллюстрируйте его графически для случая двух состояний природы.

Указание: Пусть h — ставка налога, а σ_w — частный риск портфеля, измеряемый среднеквадратичным отклонением валовой доходности портфеля. Тогда

$$\sigma_w = (1 - h)\,\alpha\, w\, \sigma_R.$$

Дифференцируя это соотношение, получим

$$\frac{d\sigma_\omega}{dh} = -\alpha\, w\, \sigma_R + (1 - h)\, w\, \sigma_R \frac{d\alpha}{dh}.$$

Для величины $\frac{d\alpha}{dh}$ можно получить соотношение

$$\frac{d\alpha}{dh} = \frac{\alpha R_0}{(1-h)^2} \frac{\mathsf{E}\,(u''(\tilde{w})(\tilde{R} - R_0))}{\mathsf{E}\,(u''(\tilde{w})(\tilde{R} - R_0)^2)}.$$

$$\frac{d\sigma_\omega}{dh} = w\, \sigma_R\, R_0 \frac{\mathsf{E}\,(u''(\tilde{w})(\tilde{R} - R_0))}{\mathsf{E}\,(u''(\tilde{w})(\tilde{R} - R_0)^2)}.$$

Литература: А.А.Аткинсон, Дж. Стиглиц. Лекции по экономической теории государственного сектора. — М.: Аспект-Пресс, 1995.

13. Покажите, что для элементарной функции полезности $u(w) = -\,e^{-bw}$, где b — положительное число, спрос на рисковый актив зависит только от его доходности и не зависит от уровня богатства w.

14. Покажите, что для элементарной функции полезности

$$u(w) = w^{1-\varepsilon}/(1-\varepsilon),\ \varepsilon > 0,\ \varepsilon \neq 1.$$

доля инвестиций в рисковый актив (в сумме инвестиций в оптимальный портфель) не зависит от богатства.

---

[3] Это упражнение опирается на методы сравнительной статики, которые используются в анализе влияния налогообложения на инвестиционные решения, в том числе и на отношение к риску. Предположим, в частности, в ситуации предыдущего упражнения, пункт (а), что h – ставка налогообложения. Тогда результат предыдущего упражнения — (a (1 – h) = const — означает, что уровень (частного) риска оптимального портфеля (измеряемого дисперсией дохода, получаемого его владельцем) в предположении, что он содержит оба актива, не зависит от ставки налогообложения доходов от инвестиций.

Это утверждение о постоянстве частного риска (при росте риска социального, поскольку доля рисковых инвестиций в общей сумме инвестиций, а вместе с ним и дисперсия (риск) портфеля возрастает) при введении пропорционального налога на доходы от инвестиций оказывается, вообще говоря, неверным в случае, когда доход приносит и безрисковый актив.

1. Общее равновесие

Теоремы существования общего равновесия

В этом параграфе мы проиллюстрируем ряд стандартных способов доказательства существования равновесия в двух типах экономик: экономиках обмена и экономиках Эрроу-Дебре.

Рассмотрим вначале экономику обмена. Пусть имеются l благ и n потребителей, каждый из которых характеризуется отношением предпочтения $\succeq_i$ на множестве X_i[1] (в дальнейшем всюду предполагается, что отношение предпочтения является полным, транзитивным и непрерывным, так что, в соответствие с теоремой Дебре, существует представляющая данное отношение предпочтения непрерывная функция полезности $u_i(\boldsymbol{x}_i)$, которая зависит от потребления этого участника), а также собственностью (начальными запасами) $\boldsymbol{\omega}_i$. Пусть, как и прежде, $\boldsymbol{p}$ — вектор цен на товары. Предполагается, как и ранее, что потребитель максимизирует свою полезность на бюджетном множестве, которое определяется его собственностью $\boldsymbol{\omega}_i$. Таким образом, задачу отдельного потребителя можно записать в виде:

$$u_i(\boldsymbol{x}_i) \to \max_{\boldsymbol{x}_i}$$
$$\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{x}_i \leqslant \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{\omega}_i$$
$$\boldsymbol{x}_i \in X_i.$$

Общее ограничение для экономики состоит в том, что выполнены материальные (полу-) балансы, т.е. суммарное потребление не может превышать начальных запасов благ:

$$\sum_i x_i^k \leqslant \sum_i \omega_i^k$$

Определение 1.

Под экономикой обмена мы будем понимать следующее множество

$$\mathcal{E} = \{(X_i, u_i(.))_{i\in I;}\ (\boldsymbol{\omega}_i)_{i\in I}\}.$$

Введем теперь определение равновесия для экономики обмена.

Определение 2.

Под (общим) равновесием в экономике обмена мы будем набор $\{\bar{\boldsymbol{p}}, \{\bar{\boldsymbol{x}}_i\}_{i\in I}\}$, такой, что:

1. Цены благ неотрицательны: $\bar{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^l_+$.
2. Каждый вектор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ является решением задачи потребителя при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$, т.е.

$$\bar{\boldsymbol{x}}_i \in \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{B}_i(\bar{\boldsymbol{p}},\ \boldsymbol{\omega}_i)} u_i(\boldsymbol{x}_i),$$

[1] В дальнейшем предполагается, что X_i — замкнутое и выпуклое подмножество l-мерного пространства благ, т. е $X_i \subseteq \mathbb{R}^{+}_{l}$.

где $\boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_i) = \{\boldsymbol{x}_i \in X_i \mid \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{x}_i \leqslant \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{\omega}_i\}$.

3. Выполнены полубалансы по благам, т.е. $\forall k$ выполнено

$$\sum_i \bar{\boldsymbol{x}}_i^k \leqslant \sum_i \omega_i^k.$$

В дальнейшем для упрощения вместо $\{\bar{\boldsymbol{x}}_i\}_{i\in I}$ будем писать $\bar{\boldsymbol{x}}$.

Модель Эрроу-Дебре.

Модель Эрроу-Дебре является развитием модели обмена и включает в себя помимо потребителей, производственный сектор.

Рассмотрим, таким образом, экономику с l благами (товарами), и двумя типами экономических агентов: потребителями и производителями. Пусть в экономике n потребителей и m производителей. Пусть множества J, I, K — множества индексов товаров, потребителей и производителей соответственно.

Для каждого предприятия j задается производственное множество Y_j — множество векторов чистого выпуска, k-я компонента вектора $y_j \in Y_j$ показывает, сколько k-го блага выпускается (или затрачивается) j-м производителем.

Особенностью модели является то, что в ней специфицированы права собственности потребителей на владение фирмами, производящими продукцию. Таким образом, в модели предполагается, что все предприятия кому-то принадлежат, то есть каждый участник i владеет долей γ_{ij} j-го предприятия, причем $\sum_{i\in I} \gamma_{ij} = 1$, $\gamma_{ij} \geqslant 0$.

Условия материальной сбалансированности в экономике с производством принимают вид:

$$\sum_i x_i^k \leqslant \sum_j y_j^k + \sum_i \omega_i^k$$

Наличие производственного сектора влияет и на постановку задачи потребителя, в частности, доход потребителя складывается из того, что он может выручить от продажи начальных запасов и из его дохода от участия в прибыли. Поэтому бюджетное ограничение потребителя имеет вид:

$$\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{x}_i \leqslant \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j\in J} \gamma_{ij}\,\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j\ .$$

Определение 3.

Под экономикой Эрроу-Дебре мы будем понимать следующее множество

$$\mathcal{E}_{\mathrm{AD}} = \{(X_i, u_i(.))_{i\in I}; (Y_j)_{j\in J}; (\boldsymbol{\omega}_i)_{i\in I}; (\gamma_{ij})_{i\in I,\, j\in J}\}.$$

Введем теперь определение равновесия для экономики Эрроу-Дебре.

Определение 4.

Под равновесием в экономике Эрроу-Дебре мы будем понимать набор $\{\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}\} = \{\bar{\boldsymbol{p}}; (\bar{\boldsymbol{x}}_i)_{i\in I}; (\bar{\boldsymbol{y}}_j)_{j\in J};\}$, такой что:

1. Цены благ неотрицательны: $\bar{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^l_+$.

2. Каждый вектор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ является решением задачи потребителя при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$, т.е.

$$\bar{\boldsymbol{x}}_i \in \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{B}_i(\bar{\boldsymbol{p}},\ \boldsymbol{\omega}_i)} u_i(\boldsymbol{x}_i),$$

где $\boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_i, \gamma_{ij}) = \{\boldsymbol{x}_i \in X_i \mid \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{x}_i \leqslant \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j\in J} \gamma_{ij}\, \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j\}$.

3. Каждый вектор $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ является решением задачи производителя при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$, т.е.

$$\bar{\boldsymbol{y}}_j \in \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{y}_j \in Y_j} \bar{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{y}_j,$$

4. Выполнены балансы по благам, т.е. $\forall k$ выполнено

$$\sum_i \bar{x}_i^k \leqslant \sum_j \bar{y}_j^k + \sum_i \omega_i^k.$$

Одним из наиболее важных вопросов, изучаемых при рассмотрении моделей общего равновесия, является вопрос существования равновесного распределения (более точно, равновесных распределений). Способы доказательства существования равновесия основаны на демонстрации того факта, что некоторое, подходящим образом построенное, отображение имеет неподвижную точку, соответствующую состоянию равновесия, что, в свою очередь, опирается на варианты теоремы Брауэра о существовании неподвижной точки непрерывного отображения некоторого компактного множества (обычно, множества цен) в себя, или на ее непосредственное обобщение — теорему Какутани о неподвижной точке точечно-множественного выпуклозначного отображения компактного множества в себя.

В наиболее простой версии доказательства построение такого отображения опирается на функцию (отображение) избыточного спроса, то есть превышение спроса над предложением. (Формальное определение избыточного спроса для различных типов экономик приводится ниже.) Доказательство существования равновесия проводится в два этапа. Сначала доказывается, что определенные свойства функции избыточного спроса гарантируют существование равновесия. Далее, для экономик различных типов указываются условия (свойства предпочтений и т.д.), которые гарантируют выполнение данных свойств избыточного спроса.

Для модели обмена функция избыточного спроса строится следующим образом. Пусть при ценах $\boldsymbol{p}$ функция спроса (или в общем случае отображение спроса) i-го участника есть $\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p})$. Тогда значение функции избыточного спроса при этих ценах показывает излишек спроса каждого товара при ценах $\boldsymbol{p}$ по сравнению с первоначальной собственностью участника. Функция избыточного спроса экономики есть сумма функций избыточного спроса для всех потребителей.

Определение 5.

Функцией (отображением) избыточного спроса в модели обмена называется функция (отображение)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) = \sum_i (\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{\omega}_i).$$

Аналогичным образом определяется избыточный спрос в модели Эрроу-Дебре. Кроме начальных запасов и спроса следует учитывать также предложение благ ($\boldsymbol{z}_j(\boldsymbol{p})$).

Определение 6.

Функцией (отображением) избыточного спроса в модели Эрроу-Дебре называется функция (отображение)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) = \sum_i (\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{\omega}_i) - \sum_j \boldsymbol{z}_j(\boldsymbol{p}).$$

В ситуации, когда избыточный спрос определяется однозначно определение равновесия можно переформулировать в терминах функции избыточного спроса, поскольку, как нетрудно понять, равновесие существует тогда и только тогда, когда существует вектор цен $\bar{\boldsymbol{p}}$, такой что $\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant \boldsymbol{0}$. Покажем это для случая экономики обмена.

Действительно, пусть $\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant \boldsymbol{0}$. Тогда, то пара $\{\bar{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{x}(\bar{\boldsymbol{p}})\}$ по определению является равновесием. С другой стороны, если $\{\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}\}$ — равновесие, то $\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}}) = \sum_i (\bar{\boldsymbol{x}}_i - \boldsymbol{\omega}_i) \leqslant \boldsymbol{0}$ (полубаланс по благам).

Определение 7. Законом Вальраса в теории общего равновесия называют следующее равенство:

$$\boldsymbol{p}\sum_i \bar{\boldsymbol{x}}_i^k = \boldsymbol{p}\sum_i \omega_i^k \text{ для экономики обмена,}$$

и

$$\boldsymbol{p}\sum_i x_i^k = \boldsymbol{p}\sum_j y_j^k + \boldsymbol{p}\sum_i \omega_i^k \text{ для экономики Эрроу-Дебре.}$$

Напомним, что в теории потребителя мы называли законом Вальраса соотношение $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{p}) = R_i$. Более правильно называть законом Вальраса равенство для экономики в целом.

В экономике обмена $R_i = \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i$, в экономике Эрроу-Дебре $R_i = \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j\in J} \gamma_{ij}\, \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j$ (при $\sum_{i\in I} \gamma_{ij} = 1$, $\gamma_{ij} \geqslant 0$), поэтому закон Вальраса в терминах избыточного спроса можно переформулировать как

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) = 0.$$

Заметим, что в соответствии с законом Вальраса равновесные цены благ должны быть равны нулю, если равновесное предложение этих благ превышает спрос на них:

$$\text{если } E^k(\bar{\boldsymbol{p}}) < 0, \text{ то } \bar{p}^k = 0.$$

(Под $E^k(\boldsymbol{p})$ понимаем избыточный спрос на k-ое благо.)

С другой стороны, на рынках благ с положительными ценами избыточный спрос должен быть равен нулю:

если $\bar{p}^k > 0$, то $E^k(\bar{\boldsymbol{p}}) = 0$.

Следующее утверждение указывает свойства функции избыточного спроса, которые гарантируют существование равновесия.

Поскольку функции спроса однородны нулевой степени, то функции избыточного спроса также однородны нулевой степени. Поэтому если $\bar{\boldsymbol{p}}$ — равновесный вектор цен, то $\lambda\bar{\boldsymbol{p}}$ (λ>0) — также равновесный вектор цен и наоборот. Т.е. равновесный вектор цен определяется с точностью до "нормировки" цен.

Будем рассматривать, поэтому, следующее множество цен $S^{l-1} = \{\boldsymbol{p} \geqslant 0 \mid \sum p^k = 1\}$. При этом каждому вектору цен $\boldsymbol{p}$ из $\mathbb{R}^l_+$ (за исключением нулевого вектора) можно сопоставит вектор $\lambda\boldsymbol{p}$ (при λ>0) из S^{l-1}. Этот способ нормировки цен удобен тем, что множество S^{l-1} компактно (что, как мы увидим ниже, позволяет непосредственно использовать теорему Брауэра).

Утверждение 1.

Предположим, что система функций $\{E^k(\boldsymbol{p})\}$, $k = 1, ..., l$ является непрерывной на множестве цен $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^l_+$, положительно однородна нулевой степени и удовлетворяет закону Вальраса $\boldsymbol{pE}(\boldsymbol{p}) = 0$.

Тогда существует вектор цен $\bar{\boldsymbol{p}}\in\mathbb{R}^l_+$ такой, что $E^k(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant 0$, $k = 1, ..., l$.

Доказательство:

Определим на множестве S^{l-1} следующую систему функций:

$$g^k(\boldsymbol{p}) = \frac{p^k + \max(0, E^k(\boldsymbol{p}))}{1 + \sum_i \max(0, E^i(\boldsymbol{p}))},$$

(Правило «пересчета» структуры цен

$$\boldsymbol{p} \leftarrow \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}),$$

имитирует возможную реакцию органа, ответственного за ценообразование, на неравновесия на рынках благ. В соответствии с ним цена дефицитного блага увеличивается на величину, пропорциональную дефициту. Коэффициент пропорциональности выбирается так, чтобы новый вектор цен был элементом множества S^{l-1}.)

Функция $\boldsymbol{g}(.)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Брауэра (она отображает S^{l-1} в себя по построению и является непрерывным, так как построено путем операций, сохраняющих непрерывность). Поэтому существует вектор цен $\bar{\boldsymbol{p}}$, являющийся неподвижной точкой функции $\boldsymbol{g}(.)$:

$$\bar{p}^k = \frac{\bar{p}^k + \max(0, E^k(\bar{\boldsymbol{p}}))}{1 + \sum_i \max(0, E^i(\bar{\boldsymbol{p}}))}.$$

Преобразуя это выражение, получим

$$\bar{p}^k \sum_i \max(0, E^i(\bar{\boldsymbol{p}})) = \max(0, E^k(\bar{\boldsymbol{p}})).$$

Умножив эти тождества на $E^k(\bar{\boldsymbol{p}})$ и сложив, получим

$$(\sum_i \max(0, E^i(\bar{\boldsymbol{p}}))) \sum_k \bar{p}^k E^k(\bar{\boldsymbol{p}}) = \sum_k E^k(\bar{\boldsymbol{p}}) \max(0, E^k(\bar{\boldsymbol{p}})).$$

В соответствии с законом Вальраса второй сомножитель левой части соотношения равен 0, поэтому

$$0 = \sum_k E^k(\bar{\boldsymbol{p}}) \max(0, E^k(\bar{\boldsymbol{p}})).$$

Величина $E^k(\bar{\boldsymbol{p}})$ max(0, $E^k(\bar{\boldsymbol{p}})$) равна либо 0, либо $(E^k(\bar{\boldsymbol{p}}))^2$. Поскольку каждое из слагаемых неотрицательно, то сумма может быть равна нулю, только если каждое слагаемое равно нулю. Отсюда следует, что $E^k(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant 0$.

■

Рассмотрим теперь, какие условия на предпочтения гарантируют нам выполнение предположений вышеприведенного утверждения. Непрерывность предпочтений гарантирует существование решений задач потребителя, по крайней мере, на множестве строго положительных цен ($\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$). Локальная ненасыщаемость предпочтений гарантирует выполнение закона Вальраса ($\boldsymbol{pE}(\boldsymbol{p}) = 0$). Строгая выпуклость предпочтений обеспечивает единственность решения задачи потребителя, а строгая выпуклость технологических множеств дает единственность решения задачи производителя.

Непрерывность и строгая выпуклость предпочтений в случае экономики обмена гарантирует непрерывность функции совокупного спроса на множестве цен и позволяет говорить о том, что система функций $\{E^k(\boldsymbol{p})\}$ для этой экономики является непрерывной на множестве цен $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$ при $\boldsymbol{\omega}_i \gg \mathbf{0}$.

Правда, указанными свойствами функции совокупного спроса и, следовательно, функции избыточного спроса обладают только на множестве положительных цен, тогда как в доказательстве утверждения требуется выполнение аналогичных свойств на множестве всех неотрицательных цен. Описанный ниже прием позволяет в ряде случаев обойти это затруднение.

Модифицируем задачу потребителя, введя дополнительно к бюджетному ограничению количественное ограничение (квоту на потребление) по каждому продукту следующего типа:

$$x_i^k \leqslant \omega_\Sigma^k + \varepsilon \qquad i = 1, ..., m, \;\; k = 1, ..., l.$$

где $\omega_\Sigma^k = \sum\limits_i \omega_i^k$ — суммарные запасы благ в экономике, ε — произвольная положительная константа.

Модифицированное таким образом бюджетное множество каждого потребителя оказывается компактным при любом векторе цен $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^l_+$ и поэтому в случае непрерывных предпочтений всегда существует наиболее предпочитаемый потребительский набор. В случае, когда предпочтения строго выпуклы, этот набор единственный, и таким образом, оказываются определенными модифицированные функции спроса $\boldsymbol{x}_i^*(\bar{\boldsymbol{p}})$ и, следовательно, модифицированная функция избыточного спроса $\boldsymbol{E}^*(.)$. В случае, когда функция $\boldsymbol{E}^*(.)$ оказывается непрерывной, Утверждение 1 гарантирует существование вектора цен $\bar{\boldsymbol{p}}$, при котором выполняется соотношение

$$\boldsymbol{E}^*(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant \mathbf{0}.$$

Выполнение соотношения $\boldsymbol{E}^*(\bar{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})$ тогда гарантирует существование равновесия в исходной модели.

Непрерывность функции $\boldsymbol{E}^*(.)$ на $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^l_+$ можно гарантировать, например, в случае, когда предпочтения участников непрерывны и строго выпуклы, а начальные запасы участников строго положительны ($\boldsymbol{\omega}_i \gg 0$). Показать это можно способом, аналогичным доказательству непрерывности функции спроса на множестве цен $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^l_{++}$ (см. главу, посвященную задаче потребителя).

Покажем теперь, что при $\boldsymbol{E}^*(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant \mathbf{0}$ определен избыточный спрос исходной задачи $\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})$, и выполнено $\boldsymbol{E}^*(\bar{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})$, т.е. равновесные цены в модифицированной модели оказываются равновесными в исходной.

Пусть $\boldsymbol{E}^*(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant \mathbf{0}$. Тогда $\{\bar{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{x}^*(\bar{\boldsymbol{p}})\}$ — равновесие в модифицированной модели. Поскольку

$$x_i^{k*}(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant \omega_\Sigma^k - \sum_{k'\neq k} x_i^{k'*}(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant \omega_\Sigma^k < \omega_\Sigma^k + \varepsilon,$$

то дополнительно введенные нами ограничения несущественны, т.е. $\{\bar{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{x}^*(\bar{\boldsymbol{p}})\}$ — равновесие в исходной модели, и $\boldsymbol{E}^*(\bar{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})$. (Аналогичным образом можно показать, что если $\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}}) \leqslant \mathbf{0}$, то $\boldsymbol{E}^*(\bar{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})$).

На основе этих рассуждений получаем следующую теорему существования равновесия в модели обмена.

Утверждение 2.
Если в экономике обмена предпочтения участников локально ненасыщаемы, непрерывны и строго выпуклы, а начальные запасы всех участников положительны ($\boldsymbol{\omega}_i \gg 0$), то равновесие существует.

На основе приведенной теоремы существования равновесия можно получать условия существования равновесия и в ситуациях экономики с производством, если функция предложения также является непрерывной. Так, гарантировать непрерывность функций предложения в модели Эрроу-Дербе можно лишь при некоторых условиях на технологические множества или представляющие их производственные функции. Наиболее простой и часто рассматриваемый в экономической теории тип производственной функций, гарантирующий непрерывность функции предложения, — неоклассическая производственная функция. Характерным примером этого типа функций является функция Кобба-Дугласа, зависящая только от "первичных" факторов производства, предложение которых ограничено.

Заметим, что мы, вообще говоря, не можем использовать прием, состоящий во введении количественных ограничений, в ситуации, когда начальные запасы хотя бы одного из участников не содержат хотя бы одного блага. Как показывает приведенный ниже пример, в этом случае функция избыточного спроса может не быть непрерывной на границе множества цен.

<u>Пример 1</u> (контрпример к теореме в случае нулевых начальных запасов одного из благ)

Пусть в экономике обмена есть только два блага (l=2), функции полезности участников $\forall i$ имеют вид

$$u_i(x_i^1, x_i^2) = \sqrt{x_i^1} + \sqrt{x_i^2},$$

а начальные запасы равны ω_i = (0, 1). Очевидно, что предпочтения рассматриваемых участников локально ненасыщаемы, непрерывны и строго выпуклы.

Задача потребителя состоит в том, чтобы максимизировать $u_i(x_i^1, x_i^2)$ при следующих ограничениях:

$$p^1 x_i^1 + p^2 x_i^2 \leqslant p^2.$$
$$x_i^1, x_i^2 \geqslant 0.$$

При $p^1, p^2 \neq 0$ спрос участника на второе благо равен $x_i^2(p^1, p^2) = \dfrac{p^1}{p^1+p^2}$. Таким образом, $x_i^2(p^1, p^2) \to 1$ при $p^2 \to 0$. Но если $p^2 = 0$, то полезность можно сделать неограниченно большой, увеличивая x_i^2 (спрос на второе благо бесконечен). Таким образом, спрос на 2-е благо не является непрерывным при $p^2 = 0$. Покажем, что в этой экономике равновесие не существует.

При $p^1, p^2 \neq 0$ спрос участника на первое благо равен $x_i^1(p^1, p^2) = \dfrac{(p^2)^2}{p^1(p^1+p^2)}$, т.е. положителен. Значит, при положительных ценах равновесия быть не может, так как в экономике первое благо отсутствует. Если же цена на одно из благ равна 0, то соответствующий спрос бесконечен, и равновесия при этих ценах тоже нет.

Заметим, что модифицированная функция избыточного спроса не является непрерывной. При $p^1, p^2 \neq 0$ спрос участника такой же, как в исходной модели, и $x_i^2(p^1, p^2) \to 1$ при $p^2 \to 0$. Но при $p^2 = 0$, спрос на второе благо равен 1 + ε. Таким образом, спрос на 2-е благо не является непрерывным при $p^2 = 0$, и приведенное доказательство существования "не работает".

Если в приведенном выше примере дать хотя бы одному из участников ненулевой запас первого блага, то, хотя избыточный спрос по прежнему не будет непрерывным, но равновесие существует. (Доказательство этого оставляем читателю в качестве упражнения.) Таким образом, вышеприведенные условия на избыточный спрос являются довольно ограничительными.

Ниже приводится другой вариант теоремы существования с более слабыми условиями на избыточный спрос. Доказательство этого утверждения состоит в указании правила процесса ценообразования (отличного от описанного выше), имитирующего поведение ценообразующего органа, которое порождает отображение множества цен S^{l-1} в себя, удовлетворяющее теореме Какутани (о существовании неподвижной точки выпуклозначного замкнутого отображения компактного множества в себя).

Утверждение 3.

Предположим, что функция $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ удовлетворяет следующим условиям:

- $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ непрерывно на $S_+^{l-1} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}_+^l \mid \sum p^k = 1, p^k > 0\}$.
- $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ однородно нулевой степени на S_+^{l-1}.
- Выполнено тождество $\boldsymbol{p}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) = 0$ $\forall \boldsymbol{p} \in S_+^{l-1}$ (закон Вальраса).
- Функции избыточного спроса ограничены снизу, т.е. существует число t, такое что

$$E^k(\boldsymbol{p}) > t \quad \forall k, \forall \boldsymbol{p} \in S^{l-1}.$$

• Если хотя бы одна из цен стремится к нулю, то избыточный спрос хотя бы на одно благо стремится к бесконечности, т.е. если $\{\boldsymbol{p}^n\} \in S^{l-1}$ и $\boldsymbol{p}^n \to \boldsymbol{p}^0$ при $n\to\infty$, причем существует благо k, такое что $p_k^0 = 0$, то

$$\max_k (E^k(\boldsymbol{p}^n)) \to \infty \text{ при } n\to\infty.$$

Тогда существует вектор $\bar{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^l_{++}$, такой что $\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}}) = 0$.

<u>Доказательство</u>:

Доказательство условно разобьем на три этапа:

1. Построение отображения единичного симплекса S^{l-1} в себя.
2. Проверка замкнутости графика и выпуклозначности построенного отображения и применение к нему теоремы о неподвижной точке.
3. Демонстрация того, что найденная неподвижная точка является вектором равновесных цен, рассматриваемой экономики.

<u>Этап 1</u>. Каждой цене $\boldsymbol{p} \in S_+^{l-1}$ сопоставим множество

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{q} \in S^{l-1} \mid \boldsymbol{qE}(\boldsymbol{p}) \geqslant \boldsymbol{q}'\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) \ \ \forall \boldsymbol{q}' \in S^{l-1}\},$$

и тем самым построим отображение $\boldsymbol{g}(.)$ из S_+^{l-1} в S^{l-1}. Другими словами, значение отображения $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p})$ ($\boldsymbol{p} \in S_+^{l-1}$) — множество всех векторов цен, максимизирующих стоимость избыточного спроса, вычисленного при старых ценах $\boldsymbol{p}$. Можно заметить, что любому неравновесному вектору цен $\boldsymbol{p} \in S_+^{l-1}$ (т.е. в данном случае вектору $\boldsymbol{p}$ такому, что $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) \neq 0$) данное отображение ставить в соответствие подмножество (грань меньшей размерности) симплекса цен, а любому равновесному вектору — весь симплекс цен.

На границе симплекса цен $S^{l-1} \setminus S_+^{l-1}$ определим $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p})$ по правилу:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{q} \in S^{l-1} \mid \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p} = 0\} = \{\boldsymbol{q} \in S^{l-1} \mid q^k = 0, \text{ если } p^k > 0\}.$$

Отметим, что множество $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p})$ непусто при любом $\boldsymbol{p} \in S^{l-1}$.

<u>Этап 2</u>. Выпуклозначность построенного отображения очевидна в силу того, что условия, определяющие множества $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p})$, линейны. Таким образом, для доказательства существования неподвижной точки остается показать, что отображение $\boldsymbol{g}(.)$ имеет замкнутый график.

Предположим, что последовательности $\{\boldsymbol{p}^n\} \in S^{l-1}$ и $\{\boldsymbol{q}^n\} \in S^{l-1}$ с пределами $\boldsymbol{p}^0$ и $\boldsymbol{q}^0$ соответственно таковы, что $\boldsymbol{q}^n \in \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}^n)$. Покажем, что $\boldsymbol{q}^0 \in \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}^0)$. Возможны две ситуации: (1) $\boldsymbol{p}^0 \in S_+^{l-1}$, (2) $\boldsymbol{p}^0 \in S^{l-1} \setminus S_+^{l-1}$.

В случае $\boldsymbol{p}^0 \in S_+^{l-1}$ существует N, такое, что при $n > N$ $\boldsymbol{p}^n \in S_+^{l-1}$. При $n > N$ выполнено

$$\boldsymbol{q}^n\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^n) \geqslant \boldsymbol{q}'\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^n) \ \ \forall \boldsymbol{q}' \in S^{l-1}.$$

Переходя к пределу, получим, что $\boldsymbol{q}^0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^0) \geqslant \boldsymbol{q}'\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^0)$. Тем самым мы показали, что в этом случае $\boldsymbol{q}^0 \in \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}^0)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\boldsymbol{p}^0 \in S^{l-1} \backslash S_+^{l-1}$. Пусть k — благо, для которого $p_k^0 >$ 0. Покажем, что при достаточно больших n выполнено $q_k^n = 0$. Тем самым мы покажем, что $q_k^0 = \lim q_k^n = 0$, и, следовательно, $\boldsymbol{q}^0 \in \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}^0)$.

Если $\boldsymbol{p}^n \in S^{l-1} \backslash S_+^{l-1}$, то по определению отображения $\boldsymbol{g}(.)$ имеем $q_k^n = 0$. Таким образом, нам осталось доказать в случае $\boldsymbol{p}^n \in S_+^{l-1}$, что если $p_k^0 > 0$, то при достаточно больших n выполнено $q_k^n = 0$. По закону Вальраса имеем

$$p_k^n E^k(\boldsymbol{p}^n) = -\sum_{k' \neq k} p_{k'}^n E^{k'}(\boldsymbol{p}^n)$$

Используя ограниченность снизу функции избыточного спроса, имеем

$$-\sum_{k' \neq k} p_{k'}^n E^{k'}(\boldsymbol{p}^n) \leqslant -t \sum_{k' \neq k} p_{k'}^n = -t\,(1 - p_k^n).$$

Отсюда

$$E^k(\boldsymbol{p}^n) \leqslant -\frac{t(1-p_k^n)}{p_k^n}.$$

Поскольку p_k^n сходится к положительному пределу, это означает, что значение E^k $(\boldsymbol{p}^n)$ ограничено сверху. С другой стороны, величина $\max_s\{E^s(\boldsymbol{p}^n)\}$ стремится к бесконечности. Поэтому при достаточно больших n выполнено неравенство

$$E^k(\boldsymbol{p}^n) < \max_s\{E^s(\boldsymbol{p}^n)\}.$$

Отсюда следует, что при достаточно больших n вектор $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}^n)$ должен иметь q^k=0. Действительно, согласно определению $\boldsymbol{g}(.)$ для любого вектора $\boldsymbol{q}'$ из S^{l-1} должно быть выполнено $\boldsymbol{q}'\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^n) \leqslant \boldsymbol{q}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^n)$. Однако, если бы q^k>0, то при $E^k(\boldsymbol{p}^n) <$ $\max_s\{E^s(\boldsymbol{p}^n)\}$ мы могли бы построить на основе вектора $\boldsymbol{q}$ вектор $\boldsymbol{q}'$ для которого $\boldsymbol{q}'\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^n) < \boldsymbol{q}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^n)$.

Тем самым мы полностью доказали, что отображение $\boldsymbol{g}(.)$ имеет замкнутый график.

Поскольку отображение $\boldsymbol{g}(.)$ имеет замкнутый график, выпуклозначно и отображает непустое компактное выпуклое множество S^{l-1} в себя, то к нему применима теорема Какутани, и существует неподвижная точка $\bar{\boldsymbol{p}} \in S^{l-1}$:

$$\bar{\boldsymbol{p}} \in \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{p}}).$$

Этап 3.

Покажем, что неподвижная точка отображения $\boldsymbol{g}(.)$ является вектором цен равновесия.

Неподвижная точка $\bar{\boldsymbol{p}}$ отображения $\boldsymbol{g}(.)$ не может принадлежать границе симплекса цен ($S^{l-1} \backslash S_+^{l-1}$). Этот факт следует из того, что согласно определению $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p})$ для $\boldsymbol{p} \in S^{l-1} \backslash S_+^{l-1}$ при всех $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p})$ должно быть выполнено равенство $\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p} = 0$. Если бы $\bar{\boldsymbol{p}}$ $\in \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{p}})$, где $\bar{\boldsymbol{p}} \in S^{l-1} \backslash S_+^{l-1}$, то мы имели бы $\bar{\boldsymbol{p}} \cdot \bar{\boldsymbol{p}} = \|\bar{\boldsymbol{p}}\|^2 = 0$. Этому условию удовлетворяет только точка $\bar{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{0}$, не принадлежащая симплексу цен.

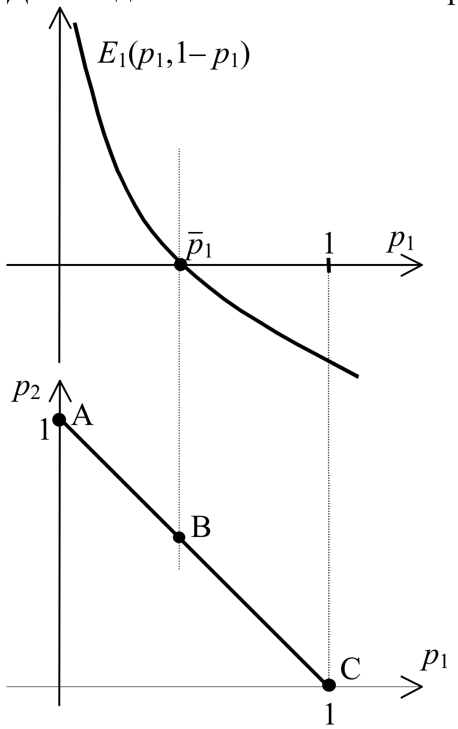
Таким образом, $\bar{\boldsymbol{p}} \gg \boldsymbol{0}$ и поэтому, как было отмечено при определении отображения, $\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{0}$. Покажем это формально.

Предположим противное. В силу закона Вальраса, если $\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}}) \neq 0$ и $\bar{\boldsymbol{p}} \gg \boldsymbol{0}$, то существуют s и s' такие, что $E^s(\bar{\boldsymbol{p}}) > 0$ и $E^{s'}(\bar{\boldsymbol{p}}) < 0$. Поскольку $\bar{\boldsymbol{p}} \in \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{p}})$ и $\bar{\boldsymbol{p}} \gg \boldsymbol{0}$, то по определению $\boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{p}})$ для любого $\boldsymbol{q} \in S^{l-1}$ должно быть выполнено $\bar{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}}) \geqslant \boldsymbol{q}\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})$. Однако, так как $E^s(\bar{\boldsymbol{p}}) > E^{s'}(\bar{\boldsymbol{p}})$, то достаточно взять следующий вектор $\boldsymbol{q}$: $q^s = \bar{p}^s + \bar{p}^{s'}$, $q^{s'} = 0$, $q^k = \bar{p}^k$, $k \neq s, s'$, чтобы получить $\bar{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}}) < \boldsymbol{q}\boldsymbol{E}(\bar{\boldsymbol{p}})$. Мы пришли к противоречию.

Тем самым мы доказали существование цен $\bar{\boldsymbol{p}}$, при которых избыточный спрос равен нулю.

■

Данное доказательство можно проиллюстрировать графически.



На данном рисунке B — неподвижная точка отображения $\boldsymbol{g}(.)$. Данное отображение определено на симплексе AC, и отображает точки отрезка AB, за исключением точки B, в точку C, точки отрезка BC, за исключением точки B, — в точку A, а точку B — во весь симплекс (отрезок AC).

Опираясь на доказанное Утверждение 3, можно показать, что в моделях обмена при непрерывности, строгой выпуклости и строгой монотонности предпочтений потребителей равновесие существует, если *совокупные* начальные запасы строго положительны, т.е. $\boldsymbol{\omega}_\Sigma \gg 0$. Это утверждение очевидно, в силу того, что функция избыточного спроса в модели обмена при данных условиях на предпочтения участников является непрерывной, однородной первой степени и удовлетворяет закону Вальраса на S_+^{l-1}. Ограниченность избыточного спроса снизу следует из того факта, что спрос участников неотрицателен и выполнены балансы (в качестве константы t можно взять $t = -\max_k\{\overset{k}{\omega}_\Sigma\}$).

Для того, чтобы полностью продемонстрировать выполнение условий Утверждения 3 для случая непрерывных, строго выпуклых и строго монотонных предпочтений, осталось показать выполнение последнего условия теоремы: если хотя бы одна из цен стремится к нулю, то избыточный спрос хотя бы на одно благо стремится к бесконечности. Покажем это формально.

В силу того, что $\boldsymbol{p}^0 \in S^{l-1}$ и $\boldsymbol{\omega}_\Sigma \gg 0$, имеем, что $\boldsymbol{p}^0 \boldsymbol{\omega}_\Sigma > 0$. Таким образом, существует потребитель i, такой, что $\boldsymbol{p}^0 \boldsymbol{\omega}_i > 0$. Следующее утверждение показывает, что спрос этого потребителя, по крайней мере, на одно из благ стремиться к бесконечности по мере того, как $\boldsymbol{p}^n$ стремиться к $\boldsymbol{p}^0$, т.е.

$$\max_k (x_i^k(\boldsymbol{p}^n)) \to \infty \text{ при } n\to\infty,$$

что и доказывает, что

$$\max_k (E^k(\boldsymbol{p}^n)) \to \infty \text{ при } n\to\infty.$$

Утверждение 4.

Пусть $\{\boldsymbol{p}^n\} \in S^{l-1}$ — последовательность цен, причем $\boldsymbol{p}^n \to \boldsymbol{p}^0$ при $n\to\infty$, и существует благо k, такое что $p_k^0 = 0$.

Предположим, что:

- Потребитель имеет строго монотонные непрерывные предпочтения.
- Начальные запасы потребителя $\boldsymbol{\omega}$ таковы, что $\boldsymbol{p}^0\boldsymbol{\omega} > 0$.

Тогда

$$\max_k (x^k(\boldsymbol{p}^n)) \to \infty \text{ при } n\to\infty.$$

<u>Доказательство</u>:

Предположим противное. Пусть спрос потребителя на все товары, ограничен, т.е. существует некоторое число $\boldsymbol{K}$, такое, что $0 \leqslant \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}) \leqslant \boldsymbol{K}$. В силу того, что бесконечная последовательность на компакте имеет точки сгущения, найдется некоторая подпоследовательность $\{\boldsymbol{p}^{n_l}\}$, такая, что:

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l}) \to \bar{\boldsymbol{x}}.$$

Так как $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l})$ — оптимальное решение задачи потребителя, а предпочтения строго монотонны, то при ценах $\boldsymbol{p}^{n_l}$ выполняется закон Вальраса, т.е.

$$\boldsymbol{p}^{n_l}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l}) = \boldsymbol{p}^{n_l}\boldsymbol{\omega}.$$

Переходя в этом тождестве к пределу, получим, $\boldsymbol{p}^0\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{p}^0\boldsymbol{\omega}$. Пусть $p_k^0 = 0$. Тогда в силу строгой монотонности предпочтений $\bar{\boldsymbol{x}} + \sigma\boldsymbol{e}^k \succ \bar{\boldsymbol{x}}$, где σ — некоторое строго положительное число. В силу того, что предпочтения потребителей непрерывны, найдется такое $\delta>0$, что $\hat{\boldsymbol{x}} \succ \bar{\boldsymbol{x}}$, где $\hat{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{x}} + \sigma\boldsymbol{e}^k - \delta\boldsymbol{e}^s$, а s — номер товара, для которого $\boldsymbol{p}_s^0 > 0$. Очевидно также, что

$$\boldsymbol{p}^0\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{p}^0\bar{\boldsymbol{x}} + \sigma p_k^0 - \delta p_s^0 = \boldsymbol{p}^0\bar{\boldsymbol{x}} - \delta p_s^0 < \boldsymbol{p}^0\bar{\boldsymbol{x}}.$$

В силу непрерывности отношения предпочтения имеем, что существует N такое, что для каждого $l > N$ $\hat{\boldsymbol{x}} \succ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l})$.

Так как $\boldsymbol{p}^{n_l} \to \boldsymbol{p}^0$ и $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l}) \to \bar{\boldsymbol{x}}$, то

$$\lim \boldsymbol{p}^{n_l}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l}) - \hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{p}^0(\bar{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}) > 0.$$

Из определения предела следует, что найдется число M такое, что для каждого l большего M справедливо, что $\boldsymbol{p}^{n_l}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l}) - \hat{\boldsymbol{x}}) > 0$, т.е.

$$\boldsymbol{p}^{n_l}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l}) > \boldsymbol{p}^{n_l}\hat{\boldsymbol{x}}$$

Таким образом, мы получили, что при $l > \max\{M, N\}$ набор $\hat{\boldsymbol{x}}$ строго лучше набора $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l})$ и при этом стоит дешевле. Тем самым мы получили противоречие с оптимальностью набора $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}^{n_l})$. Таким образом, не существует $\boldsymbol{K}$ такого, что $0 \leqslant \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}) \leqslant \boldsymbol{K}$, т.е. $\max_k (x_k(\boldsymbol{p}^n)) \to \infty$ при $n \to \infty$.

■

Резюмируя проделанные выше рассуждения, сформулируем утверждение о существовании равновесия в экономике обмена при более слабых, чем ранее, предположениях.

Утверждение 5.

Если в экономике обмена предпочтения участников локально ненасыщаемы, непрерывны и строго выпуклы, а совокупные начальные запасы положительны ($\boldsymbol{\omega}_\Sigma \gg 0$), то равновесие существует.

В ситуации, когда предпочтения не являются строго монотонными (и в частности, если соответствующее отображение избыточного спроса $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})$ не является ограниченным снизу), мы можем воспользоваться следующим утверждением, устанавливающим условия существования равновесия в модели Эрроу-Дебре.

Введем сначала следующее вспомогательное понятие.

Определение 8.

Состояние $(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) = \{\bar{\boldsymbol{p}}; (\bar{\boldsymbol{x}}_i)_{i\in I}; (\bar{\boldsymbol{y}}_j)_{j\in J}\}$ экономики Эрроу-Дебре

$$\mathcal{E} = \{(\succsim_i, (Y_j)_{j\in J}; (\boldsymbol{\omega}_i)_{i\in I}; (\gamma_{ij})_{i\in I, j\in J}\}$$

называется **квазиравновесием**, если выполняются следующие условия:

1. Для каждого потребителя $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ удовлетворяет условиям

- $\bar{\boldsymbol{x}}_i \in X_i$,
- $\bar{\boldsymbol{p}}\bar{\boldsymbol{x}}_i \leqslant \beta_i(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{y}})$,
- $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ и не хуже, чем любой другой набор $\boldsymbol{x}_i \in X_i$, который стоит (в равновесных ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$) дешевле, чем $\beta_i(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{y}})$.

2. $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ максимизирует прибыль j-го производителя при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$, т.е. решает следующую задачу:

$$\bar{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{y}_j \to \min$$
$$\boldsymbol{y}_j \in Y_j.$$

3. Выполнены полубалансы:

$$\sum_i \bar{x}_i^k \leqslant \sum_j \bar{y}_j^k + \sum_i \omega_i^k \quad \forall k.$$

Заметим, что когда предпочтения $\succeq_i$ локально ненасыщаемы, вектор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$, удовлетворяющий условию 1 определения квазиравновесия, минимизирует затраты (в равновесных ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$) на достижение уровня благосостояния, определяемого вектором $\bar{\boldsymbol{x}}_i$, т.е. решает следующую задачу

$$\bar{\boldsymbol{p}}\,\boldsymbol{x}_i \to \min$$
$$\boldsymbol{x}_i \succeq_i \bar{\boldsymbol{x}}_i,$$

а для каждого потребителя выполнено соотношение:

$$\bar{\boldsymbol{p}}\bar{\boldsymbol{x}}_i = \sum_j \gamma_{ij}\bar{\boldsymbol{p}}\bar{\boldsymbol{y}}_j + \bar{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{\omega}_i \quad \forall i.$$

(Докажите это.)

Условия существования квазиравновесия оказываются особенно простыми и описываются в приведенном ниже Утверждении **6**. С другой стороны состояние квазиравновесия является при некоторых предположениях о предпочтениях состоянием равновесия. Поэтому представляется удобным вначале установить условия существования квазиравновесия, а затем использовать их вместе с дополнительными предположениями, для доказательства существования равновесия в конкретных моделях экономики.

Утверждение 6.

Предположим, что:

1) $Z = (\sum_j Y_j + \sum_i \boldsymbol{\omega}_i) \cap \mathbb{R}^l_+$ непусто, замкнуто и ограничено, (т.е. существует N такое, что если $\boldsymbol{z} \in Z$, то $z^k \leqslant N$, $k = 1, ..., l$).

2) Предпочтения $\succeq_i$ выпуклы, непрерывны и локально ненасыщаемы, X_i — выпуклое замкнутое множество, $\mathbf{0} \in X_i$, $\boldsymbol{\omega}_i \geqslant \mathbf{0}$, $i = 1, ..., n$.

3) Y_j — выпуклое множество и $\mathbf{0} \in Y_j$, $j = 1, ..., m$.

Тогда в этой экономике существует квазиравновесие.

<u>Доказательство</u>:

Как и в предыдущих доказательствах, мы будем искать квазиравновесие как неподвижную точку некоторого специальным образом сконструированного отображения из множества $\Theta = \prod_{i=1}^{m} \hat{X}_i \times \prod_{j=1}^{n} \hat{Y}_j \times S^{l-1}$ в себя. Здесь

$$\hat{X}_i = \{\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^l_+ \mid \boldsymbol{x}_i \leqslant N+\varepsilon\},$$
$$\hat{Y}_j = \{\boldsymbol{y}_j \in Y_j \mid |\boldsymbol{y}_j| \leqslant N+\varepsilon\},$$
$$S^{l-1} = \{\boldsymbol{p} \geqslant 0 \mid \textstyle\sum_k p^k = 1\}.$$

Заметим, что каждое из этих множеств непусто, замкнуто и ограничено, поэтому их произведение Θ тоже непусто, замкнуто и ограничено.

Определим отображение $\boldsymbol{g}(.)$: $\Theta \to \Theta$ следующим образом:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{m} \boldsymbol{g}_{xi}(\boldsymbol{\theta}) \times \prod_{j=1}^{n} \boldsymbol{g}_{yj}(\boldsymbol{\theta}) \times \boldsymbol{g}_{p}(\boldsymbol{\theta}).$$

Где компоненты отображения $\boldsymbol{g}(.)$ определяются следующим образом:

$$\boldsymbol{g}_{xi}(\boldsymbol{\theta}) = \{\boldsymbol{x}_i' \in \hat{X}_i \mid \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i' \leqslant \beta_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{x}_i' \succeq \boldsymbol{x}_i''\ \forall\, \boldsymbol{x}_i'' \in \hat{X}_i\colon \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i'' < \beta_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y})\},$$

где

$$\beta_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y}) = \max\{0, \textstyle\sum_j \gamma_{ij}\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j\} + \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i,$$

$$\boldsymbol{g}_{yj}(\boldsymbol{\theta}) = \{\boldsymbol{y}_j' \in \hat{Y}_j \mid \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j' \geqslant \boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j'' \ \forall\, \boldsymbol{y}_j'' \in \hat{Y}_j\},$$

$$\boldsymbol{g}_p(\boldsymbol{\theta}) = \{\boldsymbol{p}' \in S^{l-1} \mid (\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}'')(\sum_i \boldsymbol{x}_i - \sum_j \boldsymbol{y}_j - \sum_i \boldsymbol{\omega}_i) \geqslant 0 \ \forall\, \boldsymbol{p}'' \in S^{l-1}\}.$$

Заметим, что такое определение бюджета гарантирует непустоту бюджетного множества $\{\boldsymbol{x}_i' \in \hat{X}_i \mid \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i' \leqslant \beta_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y})\}$ при любых ценах $\boldsymbol{p}$ и производственных планах $\boldsymbol{y}$.

Пусть $\bar{\boldsymbol{\theta}} = \{\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{p}}\}$ — неподвижная точка отображения $\boldsymbol{g}(.)$, т.е.

$$\bar{\boldsymbol{\theta}} \in \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{\theta}}).$$

Докажем, что $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ является квазиравновесием рассматриваемой экономики.

Поскольку каждый производственный план $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ максимизирует прибыль при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$ и $\mathbf{0} \in \hat{Y}_j$, то $\bar{\boldsymbol{p}}\bar{\boldsymbol{y}}_j \geqslant 0$ и поэтому $\beta_i(\bar{\boldsymbol{p}}, \bar{\boldsymbol{y}}) = \sum_j \gamma_{ij}\bar{\boldsymbol{p}}\,\bar{\boldsymbol{y}}_j + \bar{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{\omega}_i$.

Далее, по определению множества $\boldsymbol{g}_{xi}(\bar{\boldsymbol{\theta}})$ набор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ не хуже любого набора $\boldsymbol{x}_i \in \hat{X}_i$, удовлетворяющего строгому ограничению $\bar{\boldsymbol{p}}\,\boldsymbol{x}_i < \beta_i(\bar{\boldsymbol{p}},\bar{\boldsymbol{y}})$, поэтому из локальной ненасыщаемости $\bar{\boldsymbol{p}}\,\bar{\boldsymbol{x}}_i = \beta_i(\bar{\boldsymbol{p}},\bar{\boldsymbol{y}}) = \sum_j \gamma_{ij}\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_j + \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i$ (см. аналогичные рассуждения в Части 1).

Сложив эти равенства по всем потребителям, получим, что для экономики в целом выполнено соотношение:

$$\bar{\boldsymbol{p}}\sum_i \bar{\boldsymbol{x}}_i = \bar{\boldsymbol{p}}\sum_j \bar{\boldsymbol{y}}_j + \bar{\boldsymbol{p}}\sum_i \boldsymbol{\omega}_i.$$

Покажем теперь, что выполняются балансовые соотношения

$$\sum_i \bar{\boldsymbol{x}}_i - \sum_j \bar{\boldsymbol{y}}_j - \sum_i \boldsymbol{\omega}_i \leqslant 0$$

Действительно, если хотя бы одна из компонент данного вектора была положительна, то положительной была бы и стоимость дефицита — величина $\bar{\boldsymbol{p}}\,(\sum \bar{\boldsymbol{x}}_i - \sum \bar{\boldsymbol{y}}_j - \sum \boldsymbol{\omega}_i)$ (поскольку цены $\bar{\boldsymbol{p}}$, выбраны ценообразующим органом так, чтобы максимизировать эту величину). Но мы только что доказали, что данная величина равна нулю.

Остается показать, что количественные ограничения в условиях, определяющих отображения $\boldsymbol{g}_{xi}(.)$ и $\boldsymbol{g}_{yj}(.)$ несущественны, в то смысле, что решения соответствующих задач потребителя и производителя одни и те же, как при наличии ограничений

$$\boldsymbol{x}_i \leqslant N + \varepsilon, \ |\boldsymbol{y}_j| \leqslant N + \varepsilon,$$

так и при их отсутствии.

Пусть это не так, и существует, например, такой набор $\hat{\boldsymbol{x}}_i \in X_i$, что $\bar{\boldsymbol{p}}\hat{\boldsymbol{x}}_i < \beta_i(\bar{\boldsymbol{p}},\bar{\boldsymbol{y}})$ и $\hat{\boldsymbol{x}}_i \succ_i \bar{\boldsymbol{x}}_i$.

Поскольку выполняются соотношения

$$\sum_i \bar{\boldsymbol{x}}_i \leqslant \sum_j \bar{\boldsymbol{y}}_j + \sum_i \boldsymbol{\omega}_i \leqslant N,$$

то дополнительное количественное ограничение в точке $\bar{\boldsymbol{x}}_i^k$ должно быть выполнено как строгое неравенство:

$$\bar{\boldsymbol{x}}_i^k < N + \varepsilon.$$

На отрезке, соединяющем $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ и $\hat{\boldsymbol{x}}_i$, найдется набор $\boldsymbol{x}_i'$ (достаточно близкий к $\bar{\boldsymbol{x}}_i$), такой что $\bar{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x}_i' < \beta_i(\bar{\boldsymbol{p}},\bar{\boldsymbol{y}})$и $\boldsymbol{x}_i' \leqslant N + \varepsilon$. Поскольку отношение $\succeq_i$ выпукло, то $\boldsymbol{x}_i' \succeq_i \bar{\boldsymbol{x}}_i$, а это противоречит тому, что $\bar{\boldsymbol{x}}_i \in \boldsymbol{g}_{xi}(\bar{\boldsymbol{\theta}})$.

Похожим образом доказывается, что $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ при ценах $\bar{\boldsymbol{p}}$ максимизирует прибыль на всем множестве Y_j.

Таким образом, $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ действительно является квазиравновесием.

Для доказательства теоремы осталось проверить, что построенное отображение множества Θ в себя имеет замкнутый график, что устанавливается рассуждениями, аналогичными уже проделанным ранее (в Частях 1, 2).

■

Данное утверждение гарантирует существование равновесия в модели обмена с выпуклыми, локально ненасыщаемыми и непрерывными предпочтениями в случаях, когда начальные запасы каждого участника строго положительны. Если предпочтения участников строго монотонны, то для существования равновесия достаточно положительности суммарных начальных запасов. И, наконец, в ситуации с леонтьевскими предпочтениями, квазиравновесие всегда является равновесием. (Проверку выполнения условий теоремы существования в каждом из этих трех случаев оставляем читателю в качестве упражнения).

<u>Тесты и задачи для самостоятельного решения</u>

1. Пусть в модели обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают.
Гарантирует ли выпуклость предпочтений существование равновесия? Аргументируйте свой ответ.

2. Пусть в модели обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают.
Гарантирует ли выпуклость предпочтений единственность равновесия
(если оно существует)? Аргументируйте свой ответ.

3. Пусть в модели обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают. Гарантирует ли строгая выпуклость предпочтений единственность равновесия (если оно существует)? Аргументируйте свой ответ.

4. Пусть в модели обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают.
Гарантирует ли строгая выпуклость предпочтений существование равновесия? Аргументируйте свой ответ.

5. Предположим, что предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают, а совокупное производственное множество содержит нулевой вектор чистых

выпусков. Гарантирует ли строгая выпуклость предпочтений тот факт, что равновесные распределения (если существуют) совпадают с начальными запасами? Аргументируйте свой ответ.

6. Пусть в модели обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают и содержат все блага в положительном количестве. Будет ли равновесное распределение (если существует) совпадать с начальными запасами? Аргументируйте свой ответ.

7. Напомним, что в экономике распределения (в отличие от экономики обмена) задается вектор совокупных начальных запасов $\boldsymbol{\omega}_\Sigma$ и доход R_i каждого потребителя, т.е.

$$\mathcal{E} = \{(X_i, u_i(.))_{i\in I;}\ \boldsymbol{\omega}_\Sigma, (R_i)_{i\in I}\}$$

Под (общим) равновесием в экономике распределения мы будем понимать пару $\{\boldsymbol{p}, \bar{\boldsymbol{x}}\}=\{\boldsymbol{p}, \{\bar{\boldsymbol{x}}_i\}_{i\in I}\}$, такую, что:

— $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^l_+$,

— каждый вектор $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ является решением задачи потребителя при ценах $\boldsymbol{p}$, т.е.

$$\bar{\boldsymbol{x}}_i \in \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_i)} u_i(\boldsymbol{x}_i),$$

где $\boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{p}, R_i) = \{\boldsymbol{x}_i \in X_i \mid \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i \leqslant R_i\}$.

— выполнены полубалансы по благам, т.е. $\forall k$ выполнено

$$\sum_i \bar{x}_i^k \leqslant \sum_i \omega_i^k.$$

— $\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{\omega}_\Sigma = \sum_i R_i$

Показать, что в экономике распределения с двумя благами и двумя участниками, предпочтения которых описываются следующими функциями полезности

$$u_1(x_{11}, x_{12}) = \min\{x_{11}, x_{12}\}, \quad u_2(x_{21}, x_{22}) = x_{22}$$

не существует равновесия при $R_1 = 1$, $R_2 = 0$, и $\boldsymbol{\omega}_\Sigma = (2, 1)$.

8. Показать, что в экономике обмена с двумя благами и двумя участниками, описываемыми следующими функциями полезности

$u_1(x_{11}, x_{12}) = x_{11}, \qquad u_2(x_{21}, x_{22}) = x_{22},$

не существует равновесия при $\boldsymbol{\omega}_1 = (1, 1)$, $\boldsymbol{\omega}_2 = (0, 1)$.

9. Показать, что в экономике распределения, состоящей из 3 участников и двух товаров, спрос третьего участника в окрестности точки равновесия обладает эффектом Гиффена. Целевые функции участников имеют вид:

$$u_1(x_{11}, x_{12}) = x_{11},$$
$$u_2(x_{21}, x_{22}) = x_{22},$$
$$u_3(x_{31}, x_{32}) = 28x_{31} + 28x_{32} - 2x_{31}^2 - 3x_{31}x_{32} - 2x_{32}^2.$$

В экономике общие запасы товаров представлены вектором $\omega = (4, 4)$, а денежные ресурсы участников равны 4, 12 и 12 денежных единиц соответственно.

10. Рассмотрим экономику обмена с двумя товарами и тремя потребителями, которые имеют следующие функции полезности и начальные запасы.

$u_1(x_1, y_1) = \sqrt{x_1} + \sqrt{y_1}$ $\qquad \boldsymbol{\omega}_1 = (1, 2)$

$u_2(x_2, y_2) = \min\{x_2, y_2\}$ $\qquad \boldsymbol{\omega}_2 = (3, 4)$

$u_3(x_3, y_3) = y_3\, e^{x_3}$ $\qquad \boldsymbol{\omega}_3 = (1, 1)$

Найдите функции спроса участников, опишите их свойства. Найдите равновесие в этой экономике.

11. Рассмотрим экономику обмена с двумя товарами и двумя потребителями, которые имеют следующие функции полезности и начальные запасы.

$$u_1(x_1, y_1) = -\frac{1}{x_1^{\,2}} - \left(\frac{12}{37}\right)^3 \frac{1}{y_1^{\,2}} \qquad \omega_1 = (1, 0),$$

$$u_2(x_2, y_2) = -\left(\frac{12}{37}\right)^3 \frac{1}{x_2^{\,2}} - \frac{1}{y_2^{\,2}} \qquad \omega_2 = (0, 1).$$

Найдите равновесие в этой экономике. Единственно ли оно?

12. Пусть функция избыточного спроса имеет вид

$$E_1(p_1, p_2) = -\frac{p_2}{p_1 + p_2} \qquad\qquad E_2(p_1, p_2) = -\frac{p_1}{p_1 + p_2}$$

Является ли она однородной?

Является ли она непрерывной?

Может ли быть функцией избыточного спроса для некоторой экономики?

13. Пусть функция избыточного спроса имеет вид

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}) = \frac{\boldsymbol{pa}}{\boldsymbol{p\omega}}\boldsymbol{b} - \frac{\boldsymbol{pb}}{\boldsymbol{p\omega}}\boldsymbol{a}.$$

Является ли она однородной? Является ли она непрерывной? Выполняется ли для нее закон Вальраса?

14. Пусть функции избыточного спроса на первые два товара в трехтоварной экономике имеют вид

$$E_1(\boldsymbol{p}) = -p_1/p_3 + p_2/p_3 + 1 \quad \text{и} \quad E_2(\boldsymbol{p}) = p_1/p_3 - 2p_2/p_3 + 2.$$

Найдите избыточный спрос на третий товар.

Может ли быть функцией избыточного спроса для некоторой экономики?

15. Пусть экономика состоит из двух потребителей, и в ней обращаются два товара. Функции полезности потребителей имеют вид

$$u_1(x_1,y_1) = x_1^{\alpha} y_1^{1-\alpha} \quad \text{и} \quad u_2(x_2,y_2) = x_2^{\beta} y_2^{1-\beta}.$$

Потребители обладают начальными запасами в размере

$$\omega_1 = (a,b) \quad \text{и} \quad \omega_2 = (c,d).$$

Найдите равновесные цены и спрос участников. Найдите полезности участников в точке равновесия как функции параметров a, b, c, d.

16. Вычислите квазиравновесия в следующей модели обмена:

В экономике есть только два блага (l=2), функции полезности участников $\forall i$ имеют вид

$$u_i(x_i^1, x_i^2) = \sqrt{x_i^1} + \sqrt{x_i^2},$$

а начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_i = (0, 1)$.

Основные положения экономики благосостояния

Введем в рассмотрение множество (физически) допустимых состояний $\mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}_\Sigma)$:

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}_\Sigma) = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \sum_{i\in I} \boldsymbol{x}_i \leqslant \sum_{j\in J} \boldsymbol{y}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma, \ \ \boldsymbol{x}_i \geqslant \boldsymbol{0}, \ \boldsymbol{y}_j \in Y_j\}$$

Здесь и далее под $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ понимается $(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n; \boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_\mathrm{m})$. $\boldsymbol{\omega}_\Sigma$ обозначает общие начальные запасы благ в экономике.

Определение 9. Говорят, что допустимое состояние экономики $\{\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}\}$ строго доминирует (по Парето) состояние $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$, если $\bar{\boldsymbol{x}}_i \succ_i \boldsymbol{x}_i$ для любого потребителя i.

Определение 10. Говорят, что точка $\{\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}\}$ принадлежит слабой границе Парето ($\mathcal{WP}$), если не существует строго доминирующей ее допустимой точки, т.е.

$$\mathcal{WP} = \{(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}_\Sigma) \mid \nexists\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}_\Sigma) : \boldsymbol{x}_\mathrm{i} \succ \hat{\boldsymbol{x}}_i \ \forall\, i \in I\ \}$$

Определение 11. Говорят, что допустимое состояние экономики $\{\bar{\boldsymbol{x}}_1, ..., \bar{\boldsymbol{x}}_n; \bar{\boldsymbol{y}}_1, ..., \bar{\boldsymbol{y}}_m\}$ доминирует (по Парето) другое допустимое состояние $\{\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n; \boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_\mathrm{m}\}$, если $\bar{\boldsymbol{x}}_i \succsim_i \boldsymbol{x}_i$ для любого потребителя i и существует i_0 такой, что $\bar{\boldsymbol{x}}_{i_0} \succ_{i_0} \boldsymbol{x}_{i_0}$.

Определение 12. Допустимую точку $\{\hat{\boldsymbol{x}}_1, ..., \hat{\boldsymbol{x}}_n; \hat{\boldsymbol{y}}_1, ..., \hat{\boldsymbol{y}}_m\}$ называют Парето-оптимальным состоянием экономики, если не существует доминирующей ее другой допустимой точки. Множество Парето-оптимальных состояний называют (сильной) границей Парето ($\mathcal{P}$):

$$\mathcal{P} = \{(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}_\Sigma) \mid \nexists\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}_\Sigma): \boldsymbol{x}_\mathrm{i} \succsim \hat{\boldsymbol{x}}_i \ \forall\, i \in I, \ \exists\, i_0 \in I: \boldsymbol{x}_{i_0} \succ \hat{\boldsymbol{x}}_{i_0}\}.$$

Утверждение 7.
1) Если предпочтения каждого участника строго монотонны и непрерывны, то сильная граница Парето совпадает со слабой: $\mathcal{P} = \mathcal{WP}$.

2) Если предпочтения каждого участника полустрого монотонны[2] и непрерывны, то все точки сильной границы Парето, компоненты которых строго положительны, также принадлежат и слабой границе Парето.

<u>Доказательство</u>:

1) Очевидно, что по определению границы Парето $\mathcal{P}$ и слабой границы Парето $\mathcal{WP}$ имеем включение $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{WP}$. Таким образом нам остается показать, что $\mathcal{WP} \subseteq \mathcal{P}$. Пусть это не так, т.е. существует допустимое распределение $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{WP}$ и $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \notin \mathcal{P}$. По определению границы Парето существует другое допустимое распределение $(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}})$ такой, что $\tilde{\boldsymbol{x}}_i \succeq_i \bar{\boldsymbol{x}}_i$ $\forall\ i \in I$ и $\exists\ i_0 \in I$ $\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0} \succ_{i_0} \bar{\boldsymbol{x}}_{i_0}$. Заметим, что $\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0} \neq \boldsymbol{0}$,т. е существует k такой, что $\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0k} > 0$. (По свойству строгой монотонности не существует $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^l_+$ такого, что $\boldsymbol{0} \succ \boldsymbol{z}$.) Пусть ε – вектор, где на месте k стоит 1, а на остальных местах 0. Рассмотрим теперь перераспределение

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{i_0}(n) = \tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0} - \frac{1}{n}\varepsilon$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i(n) = \tilde{\boldsymbol{x}}_i + \frac{1}{n(n-1)}\varepsilon \quad \forall\ i \neq i_0$$

По свойству строгой монотонности, имеем $\dot{\boldsymbol{x}}_i(n) \succ_i \tilde{\boldsymbol{x}}_i(n)$ $\forall i \neq i_0$ $\forall n$, отметим, что по свойству непрерывности предпочтений найдется такое n^* такое, что $\dot{\boldsymbol{x}}_{i_0}(n^*) \succ_{i_0} \bar{\boldsymbol{x}}_{i_0}$. Таким образом, мы нашли допустимое распределение $(\dot{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}})$ которое строго доминирует допустимое распределение $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$, чего быть не может, так $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ принадлежит слабой границе Парето.

2) Доказательство этого утверждения оставляется в качестве упражнения.

■

Утверждение 8. (Первая теорема благосостояния)

Вальрасовское равновесие $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{p})$ всегда принадлежит слабой границе Парето $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{WP}$.

Вальрасовское равновесие $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{p})$ при условии локальной ненасыщаемости предпочтений всегда принадлежит сильной границе Парето: $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{P}$.

<u>Доказательство</u>:

1. Эта часть теоремы доказывается по аналогии со 2-й частью и оставляется в качестве упражнения.

2. Предположим, что $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \notin \mathcal{P}$. Тогда существует допустимое состояние экономики $(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}})$, такое что $\tilde{\boldsymbol{x}}_i \succeq_i \bar{\boldsymbol{x}}_i \forall i$ и существует потребитель i_0, такой что $\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0} \succ_{i_0} \bar{\boldsymbol{x}}_{i_0}$.

Поскольку $\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0} \succ_{i_0} \bar{\boldsymbol{x}}_{i_0}$, то $\boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0} > \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}}_{i_0}$, поскольку $\bar{\boldsymbol{x}}_{i_0}$ — решение задачи потребителя, чего не могло бы быть, если бы набор $\tilde{\boldsymbol{x}}_{i_0}$ был допустимым.

Покажем теперь, что из $\tilde{\boldsymbol{x}}_i \succeq_i \bar{\boldsymbol{x}}_i \forall i$ следует, что $\boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}}_i \geqslant \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}}_i$. Пусть это не так и для некоторого потребителя i $\boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}}_i < \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}}_i$. Существует достаточно малая окрестность точки $\tilde{\boldsymbol{x}}_i$, для точек которой все еще выполнено $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_i < \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}}_i$. По локальной ненасыщаемо-

---

[2] Предпочтения называются полустрого монотонными, если из $\boldsymbol{x} \gg \boldsymbol{y}$ следует, что $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$.

сти в этой окрестности существует набор $\check{\boldsymbol{x}}_i$, такой что $\check{\boldsymbol{x}}_i \succ_i \tilde{\boldsymbol{x}}_i$. Это противоречит тому, что $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ — оптимум в задаче потребителя.

Просуммируем полученные неравенства по всем i:

$$\sum_i \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}}_i > \sum_i \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}}_i.$$

Поскольку $\bar{\boldsymbol{y}}_j$ максимизирует прибыль на Y_j, то $\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{y}}_j \geqslant \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{y}}_j$. Просуммируем эти неравенства по всем j:

$$\sum_j \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{y}}_j \geqslant \sum_j \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{y}}_j.$$

При локальной ненасыщаемости выполнен закон Вальраса (бюджетное ограничение выходит на равенство). Так как $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ — решение задачи потребителя, то:

$$\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_j \gamma_{ij}\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{y}}_j.$$

Просуммировав по всем потребителям, получим

$$\sum_i \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}}_i = \sum_i (\boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_j \gamma_{ij}\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{y}}_j) = \sum_i \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_j (\sum_i \gamma_{ij})\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{y}}_j =$$
$$= \sum_i \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_j \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{y}}_j.$$

В результате получим цепочку соотношений

$$\sum_i \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}}_i > \sum_i \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{x}}_i = \sum_i \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_j \boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{y}}_j \geqslant \sum_i \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_j \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{y}}_j.$$

С другой стороны, состояние $(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}})$ допустимо и выполнены материальные балансы:

$$\sum_i \tilde{\boldsymbol{x}}_i \leqslant \sum_i \boldsymbol{\omega}_i + \sum_j \tilde{\boldsymbol{y}}_j.$$

Домножив на (неотрицательные) цены, получим

$$\sum_i \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{x}}_i \leqslant \sum_i \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_j \boldsymbol{p}\tilde{\boldsymbol{y}}_j.$$

Получили противоречие. Значит, $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{P}$.

■

Утверждение 9. (Вторая теорема благосостояния)

Пусть предпочтения потребителей выпуклы, непрерывны и локально ненасыщаемы, технологические множества каждого производителя выпуклы и по крайней мере одно удовлетворяет свойству свободы расходования.

Тогда если $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ — оптимальное по Парето состояние и $\hat{\boldsymbol{x}}_i \gg \boldsymbol{0}\ \forall i$, то существуют цены $\boldsymbol{p}$, такие что $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{p})$ является равновесием Вальраса при некотором распределении собственности $\boldsymbol{\omega}_i$ и γ_{ij}.

Доказательство:

Введем ряд обозначений которые нам понадобятся в дальнейшем для доказательства этого утверждения.

Обозначим множество лучших чем $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ точек (для потребителя i) через

$$L_i^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_i) = \{\boldsymbol{x}_i \geqslant \boldsymbol{0} \mid \boldsymbol{x}_i \succ_i \hat{\boldsymbol{x}}_i\}.$$

Поскольку предпочтения потребителей выпуклы, то, как несложно показать, $L_i^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_i)$ также выпуклы и, значит, их сумма

$$L^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \sum_i L_i^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_i) = \{\sum_i \boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{x}_i \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}_i \succ_i \hat{\boldsymbol{x}}_i\}$$

выпукла. Кроме того, $L_i^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_i)$ непусты по локальной ненасыщаемости, значит и $L^{++}(\hat{\boldsymbol{x}})$ непусто.

Множество

$$Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma = \sum_j Y_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma = \{\sum_j \boldsymbol{y}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma \mid \boldsymbol{y}_j \in Y_j\}.$$

тоже является выпуклым в силу выпуклости технологических множеств и непустым, так как ему принадлежит точка $\sum_j \hat{\boldsymbol{y}}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$.

Поскольку $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ — оптимум Парето, то множества $L^{++}(\hat{\boldsymbol{x}})$ и $Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$ не имеют общих точек:

$$L^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}) \cap (Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma) = \varnothing.$$

Предположим, что существует общая точка $\boldsymbol{z} \in L^{++}(\hat{\boldsymbol{x}})$ и $\boldsymbol{z} \in Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$. Это означало бы, что существует состояние экономики $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, такое что $\boldsymbol{x}_i \in X_i$, $\boldsymbol{x}_i \succ_i \hat{\boldsymbol{x}}_i$ $\forall i$, $\boldsymbol{y}_j \in Y_j$ $\forall j$, $\sum_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{z}$ и $\sum_j \boldsymbol{y}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma = \boldsymbol{z}$. Тем самым мы нашли бы допустимое состояние экономики, которое доминирует оптимальное по Парето состояние $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$, чего быть не может.

Поскольку множества $L^{++}(\hat{\boldsymbol{x}})$ и $Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$ выпуклы, непусты и не пересекаются, к ним применима теорема об отделимости. Поэтому существует вектор $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^l$, $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ и число $r \in \mathbb{R}$, такие что

$$\boldsymbol{pz} \geqslant r, \text{ если } \boldsymbol{z} \in L^{++}(\hat{\boldsymbol{x}})$$

и

$$\boldsymbol{pz} \leqslant r, \text{ если } \boldsymbol{z} \in Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma.$$

Пусть $\boldsymbol{x}$ — такой набор допустимых потребительских наборов, что $\boldsymbol{x}_i \succeq_i \hat{\boldsymbol{x}}_i$ $\forall i$. Покажем, что $\boldsymbol{p}\sum_i \boldsymbol{x}_i \geqslant r$.

Из локальной ненасыщаемости $\succeq_i$ следует, что для любого натурального числа n в окрестности $\boldsymbol{x}_i$ существует набор $\boldsymbol{x}_i^n$, такой, что $\boldsymbol{x}_i^n \succ \boldsymbol{x}_i$ и $\boldsymbol{x}_i^n \in V_{1/n}(\boldsymbol{x}_i)$, где $V_{1/n}(\boldsymbol{x}_i)$ — шар с центром $\boldsymbol{x}_i$ и радиусом $1/n$. Заметим, что последовательность $\boldsymbol{x}_i^n$ сходится к $\boldsymbol{x}_i$. Поскольку $\boldsymbol{x}_i^n \succ \boldsymbol{x}_i \succeq \hat{\boldsymbol{x}}_i$, то $\boldsymbol{p}\sum_i \boldsymbol{x}_i^n \geqslant r$. Переходя к пределу по n, имеем $\boldsymbol{p}\sum_i \boldsymbol{x}_i \geqslant r$.

Покажем, что $\boldsymbol{p} \geqslant \boldsymbol{0}$. Пусть это не так, и существует благо k, такое что $p_k<0$. Рассмотрим некоторый вектор $\bar{\boldsymbol{z}} \in Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$. Существуют $\bar{\boldsymbol{y}}_j \in Y_j$, такие что $\sum_j \bar{\boldsymbol{y}}_j = \bar{\boldsymbol{z}}$. По условию теоремы существует предприятие j_1, технологическое множество которого характеризуется свободой расходования. Для этого предприятия $\bar{\boldsymbol{y}}_{j_1} - t\boldsymbol{e}^k \in Y_{j_1}$, где $\boldsymbol{e}^k$ — k-й единичный орт, t — положительное число. Поэтому $\bar{\boldsymbol{z}} - t\boldsymbol{e}^k \in Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$. Для $\bar{\boldsymbol{z}}$ выполнено $\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{z}} \leqslant r$. Можно подобрать достаточно большое t, так что $\boldsymbol{p}(\bar{\boldsymbol{z}} - t\boldsymbol{e}^k) > r$. Но это противоречит тому, что $\bar{\boldsymbol{z}} - t\boldsymbol{e}^k \in Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$.

Поскольку $\hat{\boldsymbol{x}}_i \succeq \hat{\boldsymbol{x}}_i$ $\forall i$ (по рефлексивности отношения предпочтения), то $\boldsymbol{p}\sum_i \hat{\boldsymbol{x}}_i \geqslant r$. С другой стороны, так как $\sum_j \hat{\boldsymbol{y}}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma \in Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$, то $\boldsymbol{p} \sum_j \hat{\boldsymbol{y}}_j + \boldsymbol{p}\, \boldsymbol{\omega}_\Sigma \leqslant r$.

Поскольку состояние $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ является допустимым, то $\sum_i \hat{\boldsymbol{x}}_i \leqslant \sum_j \hat{\boldsymbol{y}}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$. Домножив на $\boldsymbol{p} \geqslant \boldsymbol{0}$ имеем

$$\boldsymbol{p} \sum_i \hat{\boldsymbol{x}}_i \leqslant \boldsymbol{p} \sum_j \hat{\boldsymbol{y}}_j + \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_\Sigma.$$

Получим цепочку неравенств

$$r \leqslant \boldsymbol{p} \sum_i \hat{\boldsymbol{x}}_i \leqslant \boldsymbol{p} \sum_j \hat{\boldsymbol{y}}_j + \boldsymbol{p}\boldsymbol{\omega}_\Sigma \leqslant r.$$

откуда $\boldsymbol{p}\sum_i \hat{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{p}\,(\sum_j \hat{\boldsymbol{y}}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma) = r$.

Возьмем $\boldsymbol{p}$ в качестве цен равновесия и покажем, что $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{p})$ является равновесием.

Покажем сначала, что при этих ценах прибыль каждого предприятия j_0 максимальна в точке $\hat{\boldsymbol{y}}_{j_0}$. Пусть $\boldsymbol{y}_{j_0} \in Y_{j_0}$. Тогда $\boldsymbol{y}_{j_0} + \sum_{j\neq j_0} \hat{\boldsymbol{y}}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma \in Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$ и выполнено

$$\boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{y}_{j_0} + \textstyle\sum_{j\neq j_0} \hat{\boldsymbol{y}}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma) \leqslant \boldsymbol{p}\,(\sum_j \hat{\boldsymbol{y}}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma) = r.$$

Отсюда $\boldsymbol{p}\boldsymbol{y}_{j_0} \leqslant \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{y}}_{j_0}$.

Теперь покажем, что при ценах $\boldsymbol{p}$ полезность каждого потребителя i_0 максимальна в точке $\hat{\boldsymbol{x}}_{i_0}$. Пусть $\boldsymbol{x}_{i_0} \in X_{i_0}$ и $\boldsymbol{x}_{i_0} \succ_{i_0} \hat{\boldsymbol{x}}_{i_0}$. Покажем, что этот лучший набор стоит дороже, чем $\hat{\boldsymbol{x}}_{i_0}$ в ценах $\boldsymbol{p}$.

Так как $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, ..., \boldsymbol{x}_{i_0}, ..., \hat{\boldsymbol{x}}_n)$ не хуже для каждого потребителя, чем $\hat{\boldsymbol{x}}$, то

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_{i_0} + \boldsymbol{p}\textstyle\sum_{i\neq i_0} \hat{\boldsymbol{x}}_i \geqslant r = \boldsymbol{p}\sum_i \hat{\boldsymbol{x}}_i.$$

Поэтому $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_{i_0} \geqslant \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_{i_0}$. Нам нужно показать, что неравенство здесь строгое. Предположим, что $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_{i_0} = \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_{i_0}$. Поскольку $\hat{\boldsymbol{x}}_{i_0} \gg \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{p} \geqslant\neq \boldsymbol{0}$, то существует допустимый набор $\boldsymbol{x}'_{i_0}$, такой что $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}'_{i_0} < \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_{i_0} = \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_{i_0}$ (например, $\boldsymbol{x}'_{i_0} = \alpha\hat{\boldsymbol{x}}_{i_0}$, $0<\alpha<1$). Рассмотрим выпуклые комбинации $\alpha\boldsymbol{x}'_{i_0} + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_{i_0}$, $\alpha \in [0,1]$. По непрерывности предпочтений найдется достаточно малое положительное α, такое что

$$\boldsymbol{x}''_{i_0} = \alpha\boldsymbol{x}'_{i_0} + (1-\alpha)\,\boldsymbol{x}_{i_0} \succ_{i_0} \hat{\boldsymbol{x}}_{i_0}.$$

Набор потребительских наборов $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, ..., \boldsymbol{x}''_{i_0}, ..., \hat{\boldsymbol{x}}_n)$ не хуже для каждого потребителя, чем $\hat{\boldsymbol{x}}$, откуда $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}''_{i_0} + \boldsymbol{p}\sum_{i\neq i_0} \hat{\boldsymbol{x}}_i \geqslant r = \boldsymbol{p}\sum_i \hat{\boldsymbol{x}}_i$. Но, с другой стороны, $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}'_{i_0} < \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_{i_0}$. Получили противоречие. Значит, $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_{i_0} > \boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_{i_0}$.

Таким образом, мы доказали, что $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{p})$ является равновесием Вальраса. В качестве распределения собственности можно взять, например,

$$\boldsymbol{\omega}_i = \frac{\boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_i}{\boldsymbol{p}\sum_s \hat{\boldsymbol{x}}_s}\boldsymbol{\omega}_\Sigma \qquad \text{и} \qquad \gamma_{ij} = \frac{\boldsymbol{p}\hat{\boldsymbol{x}}_i}{\boldsymbol{p}\sum_s \hat{\boldsymbol{x}}_s}\ \forall j.$$

■

<u>Замечание:</u> Отметим, что утверждение теоремы остается справедливым, если заменить свободу расходования для технологического множества некоторого производителя на монотонность предпочтений некоторого потребителя.

Пусть предпочтения индивидуума задаются непрерывными функциями полезности. Сопоставим каждому индивидууму такое неотрицательное число α_i, такое, что

$\sum\limits_{i\in I}\alpha_i = 1$. Введем в рассмотрение функцию $u^{\alpha}(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{i\in I}\alpha_i u_i(\boldsymbol{x}_i)$ Рассмотрим теперь следующую экстремальную задачу:

<u>Задача поиска оптимума Парето.</u>

$$u^{\alpha}(\boldsymbol{x}) \to \max_{\boldsymbol{x},\mathbf{y}}$$

$$\sum_{i\in I}\boldsymbol{x}_i \leqslant \sum_{j\in J}\boldsymbol{y}_j + \boldsymbol{\omega}_{\Sigma}, \qquad (*)$$

$$\boldsymbol{y}_j \in Y$$

$$\boldsymbol{x}_i \geqslant \mathbf{0}.$$

Утверждение 10.

(1) Если $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ – решение задачи (*), то $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{WP}$, а если, кроме того, $\alpha_i \gg 0$, то $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{P}$.

(2) Пусть функции полезности $u_i(.)$ непрерывны и вогнуты, технологические множества Y_j выпуклы. Тогда если $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{WP}$, то найдутся такие неотрицательные α_i ($\sum\limits_{i\in I}\alpha_i = 1$), что $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ будет решением задачи (*).

<u>Доказательство</u>:

(1) Пусть $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ – решение задачи (*) и $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}) \notin \mathcal{WP}$. Тогда найдется такое допустимое состояние $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}_{\Sigma})$ (отметим, что $\mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}_{\Sigma})$ есть допустимое множество для задачи (*)), что $u_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i) > u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)\ \forall\ i\in I$. По определению функции $u^{\alpha}(.)$ имеем, что $u^{\alpha}(\bar{\boldsymbol{x}}) > u^{\alpha}(\hat{\boldsymbol{x}})$. Таким образом, получили противоречие с тем, что $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ – решение задачи (*). Доказательство для случая $\alpha_i \gg 0$ полностью аналогично.

(2) Пусть $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{WP}$. Введем обозначение $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x}_1),..., u_{\mathrm{n}}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{n}}))'$. Введем в рассмотрение следующее множество:

$$U = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid \exists\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}_{\Sigma}) \colon \boldsymbol{v} \leqslant \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\}.$$

Множество U непусто, так как $\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) \in U$. Покажем, что U — выпуклое множество. Пусть $\boldsymbol{v}' \in U$ и $\boldsymbol{v}'' \in U$. Это означает, что существуют допустимые состояния экономики $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}') \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}_{\Sigma})$ и $(\boldsymbol{x}'', \boldsymbol{y}'') \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}_{\Sigma})$, такие что $\boldsymbol{v}' \leqslant \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}')$ и $\boldsymbol{v}'' \leqslant \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}'')$. Покажем, что

$$\beta\boldsymbol{v}' + (1-\beta)\boldsymbol{v}'' \in U, \text{ где } \beta \in (0,1).$$

Несложно показать, что

$$(\beta\boldsymbol{x}' + (1-\beta)\boldsymbol{x}'', \beta\boldsymbol{y}' + (1-\beta)\boldsymbol{y}'') \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}_{\Sigma}).$$

Так как $u_i(.)$ — вогнутые функции, то

$$\boldsymbol{u}(\beta\boldsymbol{x}' + (1-\beta)\boldsymbol{x}'') \geqslant \beta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}') + (1-\beta)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}'').$$

Это означает, что $\beta\boldsymbol{v}' + (1-\beta)\boldsymbol{v}'' \leqslant \boldsymbol{u}(\beta\boldsymbol{x}' + (1-\beta)\boldsymbol{x}'')$, т.е. $\beta\boldsymbol{v}' + (1-\beta)\boldsymbol{v}'' \in U$.

Множество $\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \mathbb{R}^n_{++} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{v}_i > u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)\ \forall i\}$ также является непустым и выпуклым.

Поскольку $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{WP}$, то $U \cap (\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}) = \varnothing$, в противном случае мы нашли бы допустимое состояние экономики, в котором каждый потребитель имел бы большую полезность, чем в $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$.

По теореме об отделимости существует разделяющая эти два множества гиперплоскость, т.е. существуют вектор $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ и число b, такие что

$\boldsymbol{av} \leqslant b$ при $\boldsymbol{v} \in U$

и $\boldsymbol{av} \geqslant b$ при $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}$.

Покажем, что $\boldsymbol{a} \geqslant 0$. Предположим, что существует i, для которого $a_i < 0$. Тогда если $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}$, то $\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{e}^i \in \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}$, где t — положительное число, $\boldsymbol{e}^i$ — i-й орт. Мы всегда можем подобрать достаточно большое t, чтобы выполнялось $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{e}^i) < b$. Но это противоречит тому, что $\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{e}^i \in \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}$.

Рассмотрим последовательность $\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) + 1/n\ \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — вектор, состоящий из единиц. Поскольку $\boldsymbol{v}_n \in \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \mathbb{R}^n_{++} \forall n$, то $\boldsymbol{av}_n \geqslant b$. Переходя к пределу, получим $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) \geqslant b$. С другой стороны, $\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) \in U$ и $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) \leqslant b$, т.е. $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}) = b$.

Возьмем в качестве $\boldsymbol{\alpha}$ вектор $\boldsymbol{a}/\sum a_i$. Не существует пары $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}_\Sigma)$, такой что $\sum \alpha_i u_i(\boldsymbol{x}_i) > \sum \alpha_i u_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i)$. Действительно, для любой пары $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}_\Sigma)$ выполнено $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in U$, откуда $\boldsymbol{au}(\boldsymbol{x}) \leqslant b = \boldsymbol{au}(\hat{\boldsymbol{x}})$. Разделив это неравенство на $\sum a_i$, получим $\boldsymbol{\alpha u}(\boldsymbol{x}) \leqslant \boldsymbol{\alpha u}(\hat{\boldsymbol{x}})$. Это означает, что $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}})$ является решением задачи (*).

■

Удобным инструментом для иллюстрации введенных понятий является «ящик Эджворта». Ящик Эджворта — это диаграмма, которая позволяет наглядно представить экономику с 2 потребителями, 2 благами, в которой множества допустимых потребительских наборов имеют вид $\boldsymbol{x}_1 \geqslant \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{x}_2 \geqslant \mathbf{0}$. На этой диаграмме потребление 1-го участника (x_1^1, x_1^2) представляется в обычной системе координат, а потребление 2-го участника (x_2^1, x_2^2) — в перевернутой с центром в точке $(\omega_\Sigma^1, \omega_\Sigma^2)$, если смотреть из системы координат 1-го участника. Если балансы по благам в рассматриваемой точке $\boldsymbol{x}$ выполнены, то точка (x_1^1, x_1^2) в первой системе координат совпадет с точкой (x_2^1, x_2^2) во второй системе координат, что позволяет изобразить $\boldsymbol{x}$ одной точкой на данной диаграмме.

Чтобы можно было представить себе структуру равновесия, удобно воспользоваться графиками кривых безразличия и множеств лучших точек участников.

Напомним, что кривая безразличия i-го участника, соответствующая точке $\bar{\boldsymbol{x}}_i$, есть множество $I_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i) = \{\boldsymbol{x}_i \geqslant 0 \mid u_i(\boldsymbol{x}_i) = u_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)\}$. Множество точек, не худших, чем точка $\bar{\boldsymbol{x}}_i$, есть множество $L_i^+(\bar{\boldsymbol{x}}_i) = \{\boldsymbol{x}_i \geqslant 0 \mid u_i(\boldsymbol{x}_i) \geqslant u_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)\}$.

В терминах этих кривых точка $\hat{\boldsymbol{x}}$ есть Парето-оптимум рассматриваемой экономики, если не существует допустимой точки $\boldsymbol{x}$, такой что $\boldsymbol{x}_1 \in L_1^+(\hat{\boldsymbol{x}}_1)$, $\boldsymbol{x}_2 \in L_2^+(\hat{\boldsymbol{x}}_2)$ и выполнено *по крайне мере одно* из соотношений $\boldsymbol{x}_1 \notin I_1(\hat{\boldsymbol{x}}_1)$, $\boldsymbol{x}_2 \notin I_2(\hat{\boldsymbol{x}}_2)$.

Точка $\hat{\boldsymbol{x}}$ принадлежит слабой границе Парето, если не существует допустимой точки $\boldsymbol{x}$, такой что $\boldsymbol{x}_1 \in L_1^+(\hat{\boldsymbol{x}}_1)$, $\boldsymbol{x}_2 \in L_2^+(\hat{\boldsymbol{x}}_2)$, $\boldsymbol{x}_1 \notin I_1(\hat{\boldsymbol{x}}_1)$ и $\boldsymbol{x}_2 \notin I_2(\hat{\boldsymbol{x}}_2)$.

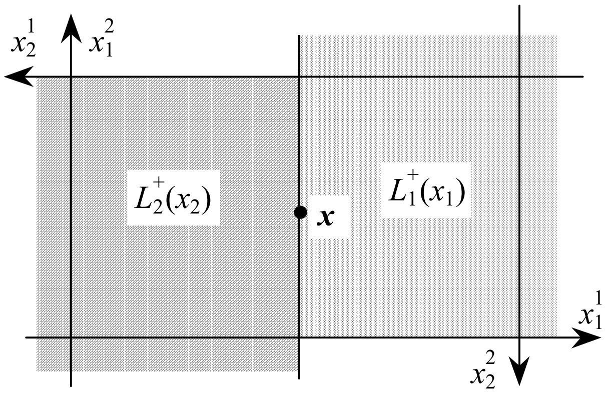
Для того, чтобы точку $\bar{\boldsymbol{x}}$ можно было реализовать как равновесие, необходимо (но в общем случае недостаточно), чтобы существовала прямая, проходящая через эту точку, такая что она разделяет множества $L_1^+(\bar{\boldsymbol{x}}_1)$ и $L_2^+(\bar{\boldsymbol{x}}_2)$. Наклон этой прямой равен отношению цен. Сама эта прямая является общим для обоих потребителей бюджетным ограничением.

Рассмотрим несколько примеров модели экономики обмена (или распределения) на ящике Эджворта. В каждом из них построим слабую и сильную границы Парето и рассмотрим взаимосвязь между ними.

<u>Пример 1</u>. Оба потребителя ценят только первое благо:

$$u_1 = x_1^1 \quad \text{и} \quad u_2 = x_2^1$$

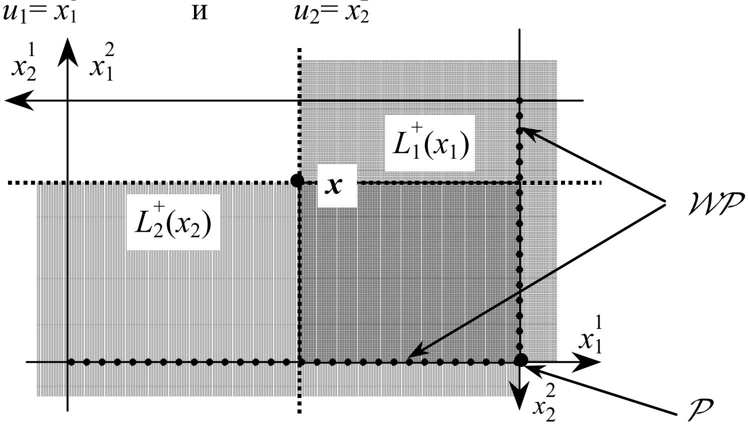
В этом случае любая точка ящика Эджворта принадлежит слабой и сильной границе Парето.



Каждую из точек можно реализовать как равновесие, при этом p^2=0.

<u>Пример 2</u>. Первый потребитель ценит только первое благо, второй — только второе:

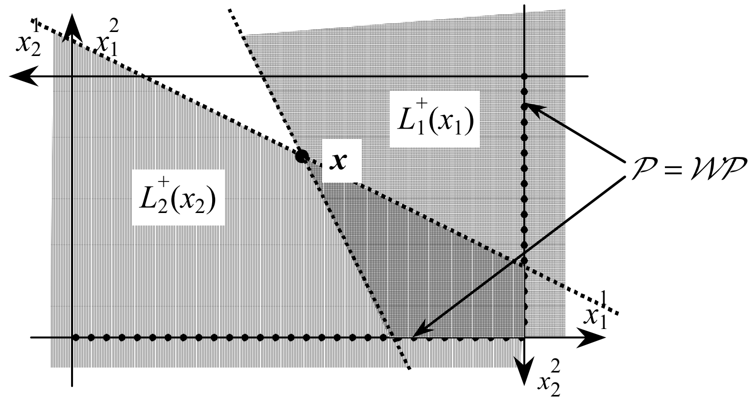
$$u_1 = x_1^1 \quad \text{и} \quad u_2 = x_2^2$$

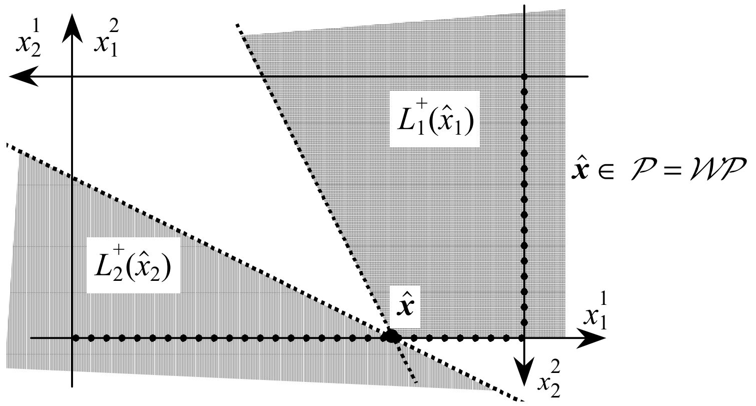


В этом случае правая и нижняя стороны ящика Эджворта составляют слабую границу Парето, а правый нижний угол — сильную Парето-границу. Сильную границу Парето можно реализовать как равновесие при любых ценах.

<u>Пример 3</u>. Потребители имеют линейные функции полезности с положительными коэффициентами:

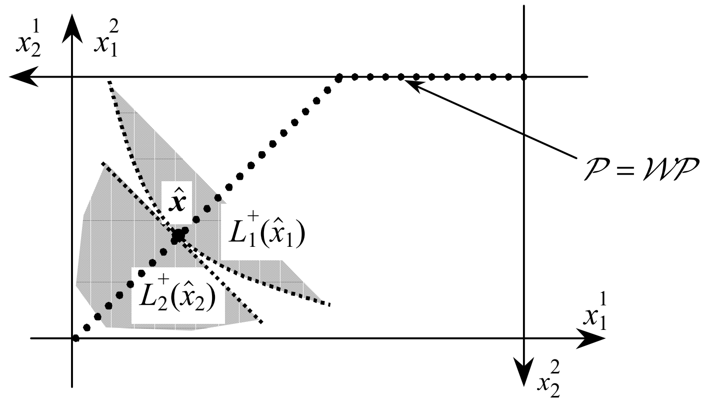
$$u_1 = 2x_1^1 + x_1^2 \qquad \text{и} \qquad u_2 = x_2^1 + 2x_2^2.$$





Пример 4. Потребители имеют функции полезности

$$u_1 = \ln x_1^1 + \ln x_1^2 \qquad \text{и} \qquad u_2 = x_2^1 + x_2^2.$$

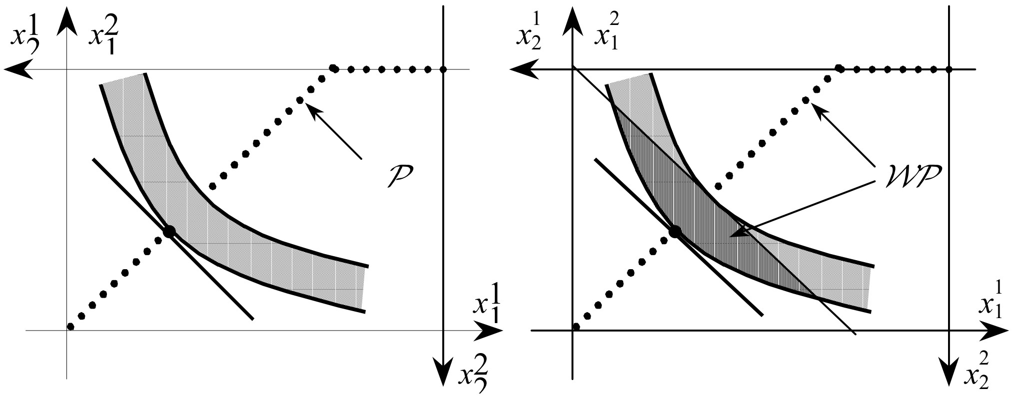


Пример 5. Первый потребитель имеет функцию полезности с "толстой" кривой безразличия

$$u_1 = \begin{cases} x_1^1 x_1^2 & x_1^1 x_1^2 < 2 \\ 2 & 2 \leqslant x_1^1 x_1^2 \leqslant 3 \\ x_1^1 x_1^2 - 1 & x_1^1 x_1^2 \geqslant 3 \end{cases}$$

и

$$u_2 = x_2^1 + x_2^2.$$



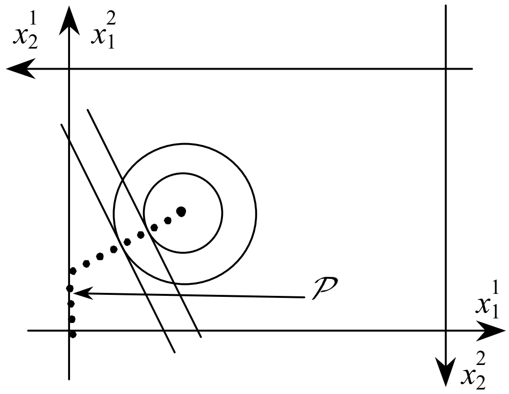
Данная ситуация представляет собой контрпример к 1-й теореме благосостояния и показывает важность условия локальной ненасыщаемости. Точки в заштрихованной области правого рисунка можно реализовать как равновесие, но они не являются Парето-оптимальными.

Пример 6. Первый потребитель насыщаем

$$u_1 = -(x_1^1 - 1)^2 - (x_1^2 - 1)^2$$

и

$$u_2 = 2\, x_2^1 + x_2^2.$$

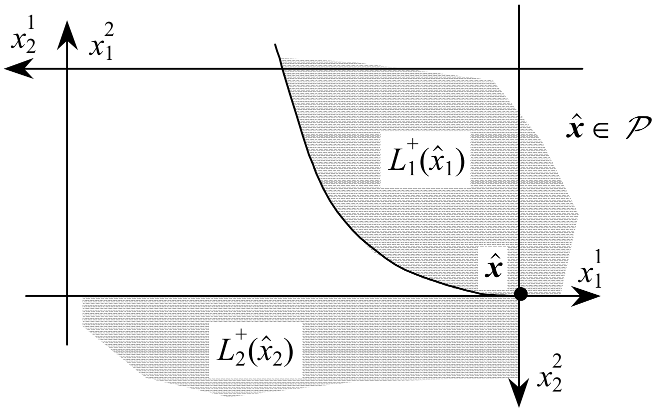


Пример 7. Потребители имеют функции полезности

$$u_1 = x_1^1 + \sqrt{x_1^2}$$

и

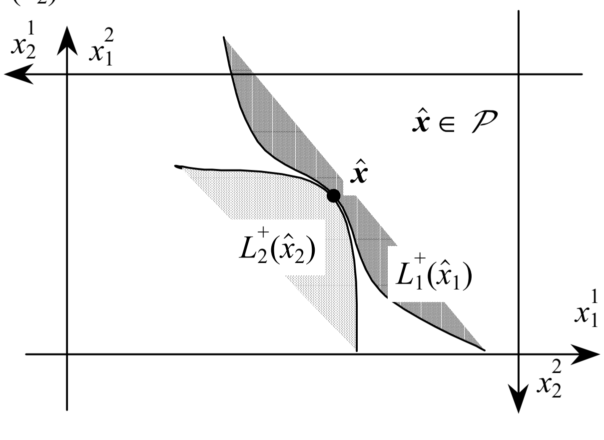
$$u_2 = x_2^2.$$



Эта экономика представляет собой контрпример ко 2-й теореме благосостояния, когда оптимум Парето не внутренний. Правый нижний угол ящика Эджворта ($\hat{\boldsymbol{x}}$) представляет собой оптимум Парето, но не может быть реализован как равновесие ни при каких ценах. Разделяющая гиперплоскость существует: $z_2 = 0$, но при ценах p_1=0 и p_2>0 набор $\hat{\boldsymbol{x}}_1$ не является решением задачи 1-го потребителя, так как полезность не ограничена сверху.

Пример 8. Контрпример ко 2-й теореме благосостояния.

1-й потребитель имеет невыпуклые предпочтения и Парето-оптимальную точку $\hat{\boldsymbol{x}}$ нельзя реализовать как равновесие — не существует прямой, которая бы разделяла $L_1^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_1)$ и $L_2^{++}(\hat{\boldsymbol{x}}_2)$.



Тесты и задачи для самостоятельного решения

1. Пусть в ситуации Примера 1 ($u_1 = x_1^1$, $u_2 = x_2^1$) совокупные начальные запасы экономики положительны $\boldsymbol{\omega}_\Sigma \gg 0$. Покажите формально, что:

а) Любая точка ящика Эджворта ($\boldsymbol{x}_1 \in [0, \omega_\Sigma^1] \times [0, \omega_\Sigma^2]$) принадлежит слабой и сильной границе Парето.

б) Каждую из точек ящика Эджворта можно реализовать как равновесие, и при этом p^2=0.

2. Пусть в ситуации Примера 2 ($u_1 = x_1^1$, $u_2 = x_2^2$) совокупные начальные запасы экономики положительны ($\boldsymbol{\omega}_\Sigma \gg 0$). Покажите формально, что:

а) Правая ($x_1^1 = \omega_\Sigma^1$, $x_1^2 \in [0, \omega_\Sigma^2]$) и нижняя ($x_1^1 \in [0, \omega_\Sigma^1]$, $x_1^2 = 0$) стороны ящика Эджворта составляют слабую границу Парето, а правый нижний угол ($\boldsymbol{x}_1 = (\omega_\Sigma^1, \omega_\Sigma^2)$) — сильную Парето-границу.

б) Сильную границу Парето можно реализовать как равновесие при любых неотрицательных ценах.

3. Пусть, как и в Примере 3, потребители имеют линейные функции полезности с положительными коэффициентами,

$$u_1 = \alpha_1 x_1^1 + \beta_1 x_1^2 \qquad \text{и} \qquad u_2 = \alpha_2 x_2^1 + \beta_2 x_2^2,$$

совокупные начальные запасы экономики положительны ($\boldsymbol{\omega}_\Sigma \gg 0$). Продемонстрируйте формально, что сильная и слабая граница Парето совпадают в этой экономике. Найдите их в зависимости от значений коэффициентов.

4. Пусть в ситуации Примера 4 ($u_1 = \ln x_1^1 + \ln x_1^2$, $u_2 = x_2^1 + x_2^2$) совокупные начальные запасы экономики положительны ($\boldsymbol{\omega}_\Sigma \gg 0$). Продемонстрируйте формально, что сильная и слабая граница Парето совпадают в этой экономике. Найдите их в зависимости от величины начальных запасов.

5. В ситуации Примера 5 при достаточно больших совокупных начальных запасах найдите формально сильную и слабую границы Парето и множество точек, которые можно реализовать как равновесие. Как соотносятся между собой эти три множества?

6. В ситуации Примера 6 ($u_1 = -(x_1^1 - 1)^2 - (x_1^2 - 1)^2$, $u_2 = 2\, x_2^1 + x_2^2$) при достаточно больших совокупных начальных запасах найдите формально границу Парето и множество точек, которые можно реализовать как равновесие.

7. В ситуации Примера 7 ($u_1 = x_1^1 + \sqrt{x_1^2}$, $u_2 = x_2^2$) при положительных совокупных начальных запасах найдите формально границу Парето и множество точек, которые можно реализовать как равновесие.

8. Покажите, что в экономике обмена прирост начальных запасов потребителя может привести к падению его полезности в точке равновесия.
Указание. Рассмотрите экономику с двумя товарами и двумя потребителями с одинаковыми предпочтениями, описываемыми следующей квазилинейной функцией полезности

$$u(\boldsymbol{x}) = \sqrt{x_1} + x_2,$$

рассмотрите сравнительную статику потребителя 1 в зависимости от изменения начальных запасов ω_1 и ω_2.

9. Предположим, что в экономике обмена с непрерывными, строго выпуклыми и строго монотонными квазилинейными сепарабельными предпочтениями происходит перераспределение начальных запасов. Покажите, что если начальные запасы потребителя возрастают, то его полезность не может упасть.

а) Рассмотрим снова передачу ресурсов от первого потребителя ко второму, как и выше, но на этот раз предпочтения не квазилинейные предположите, что передаваемое количество мало и что изменение (относительное) равновесной цены мало. Покажите, что полезность потребителя 1 может упасть. Проинтерпретируйте с точки зрения соотношения между эффектом замены и эффектом дохода.

б) Покажите, что в экономике с двумя товарами и двумя потребителями этот парадокс может произойти только в случае единственности равновесия. (Подсказка: Покажите, что если передача начальных запасов потребителя 1 ведет к уменьшению его полезности тогда в первоначальной ситуации должно существовать еще одно равновесие с еще более низким уровнем полезности у потребителя 1).

1. Математическое приложение

Свойства однородных функций

Напомним, что функция $\varphi(\boldsymbol{x})$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется однородной степени α, если для любого положительного числа t выполнено

$$\varphi(t\boldsymbol{x}) = t^{\alpha}\varphi(\boldsymbol{x}).$$

<u>Теорема 1</u>. Дифференцируемая функция $\varphi(.)$ является однородной степени α тогда и только тогда, когда выполняется тождество (формула Эйлера)

$$\sum x_i \frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \alpha\,\varphi(\boldsymbol{x}).$$

<u>Теорема 2</u>. Если дифференцируемая функция $\varphi(\boldsymbol{x})$ однородна степени α, то ее производная $\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}$ $\forall i$ однородна степени $\alpha - 1$.

Теорема Юнга

<u>Теорема 3</u>. (теорема Юнга)

Пусть функция f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема в точке $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_j \partial x_i} \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Теоремы о неподвижной точке

<u>Теорема 4</u>. (теорема Брауэра)

Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^n$ — непустое, компактное и выпуклое множество и функция f: $A \to A$ непрерывна на A. Тогда существует точка $\bar{\boldsymbol{x}} \in A$:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = f(\bar{\boldsymbol{x}}).$$

<u>Теорема 5</u>. (теорема Какутани)

Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^n$ — непустое, компактное и выпуклое множество и f: $A \to A$ — полунепрерывное сверху отображение, такое что $f(\boldsymbol{x})$ — непустое выпуклое множество для любой точки $\boldsymbol{x} \in A$. Тогда существует точка $\bar{\boldsymbol{x}} \in A$:

$$\bar{\boldsymbol{x}} \in f(\bar{\boldsymbol{x}}).$$

Теоремы отделимости

<u>Теорема 6</u>. (теорема Минковского)

Пусть имеются непустое замкнутое выпуклое множество $C \subseteq \mathbb{R}^n$ и точка $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ не принадлежащая C. Тогда найдется вектор $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, и два различных числа b_1, $b_2 \in \mathbb{R}$, $b_1 > b_2$, такие что выполнены неравенства:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geqslant b_1$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i \leqslant b_2 \quad \forall \boldsymbol{y} \in C.$$

Теорема 7.

Пусть имеются два непустых выпуклых множества C_1, $C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ не имеющие общих точек. Тогда найдется вектор $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, и число $b \in \mathbb{R}$, такие что выполнены неравенства:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geqslant b \quad \forall \boldsymbol{x} \in C_1.$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i \leqslant b \quad \forall \boldsymbol{y} \in C_2.$$

Теоремы Куна–Таккера

Пусть имеется задача максимизации с ограничениями

$$\begin{aligned} &\phi(\boldsymbol{x}) \to \max \\ &\psi_j(\boldsymbol{x}) \geqslant 0 \quad j = 1, ..., m \\ &\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ \end{aligned} \qquad (*)$$

Функцией Лагранжа (лагранжианом) этой задачи называют следующую функцию:

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \phi(\boldsymbol{x}) + \textstyle\sum_j \lambda_j \psi_j(\boldsymbol{x}),$$

где $\lambda_j \geqslant 0$ ($j = 1, ..., m$) — множители Лагранжа.

Говорят, что задача (*) удовлетворяет условию Слейтера, если существует точка $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+$, такая что

$$\psi_j(\boldsymbol{x}) > 0 \quad j = 1, ..., m.$$

Теорема 8. (о седловой точке)

Пусть задача (*) с вогнутыми функциями $\phi(\boldsymbol{x})$ и $\psi_j(\boldsymbol{x})$ ($j = 1, ..., m$) удовлетворяет условию Слейтера. Тогда точка $\bar{\boldsymbol{x}}$ является решением задачи (*) тогда и только тогда, когда существует вектор множителей Лагранжа $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbb{R}^m_+$, такой что $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ является седловой точкой функции Лагранжа данной задачи.

Теорема 9.

Пусть функции $\phi(\boldsymbol{x})$ и $\psi_j(\boldsymbol{x})$ ($j = 1, ..., m$) являются вогнутыми и дифференцируемыми и задача (*) удовлетворяет условию Слейтера. Тогда допустимая точка задачи (*) $\bar{\boldsymbol{x}}$ является оптимальной тогда и только тогда, существует вектор множителей Лагранжа $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbb{R}^m_+$, такой что выполнены следующие условия Куна-Таккера (условия дополняющей нежесткости):

$$\frac{\partial L(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})}{\partial \boldsymbol{x}} \leqslant 0,$$

$$\frac{\partial L(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})}{\partial \boldsymbol{x}} \bar{\boldsymbol{x}} = 0,$$

$$\frac{\partial L(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \bar{\boldsymbol{\lambda}} = 0.$$

Теорема об огибающей

В микроэкономическом анализе широко используется класс утверждений (называемых теоремами об огибающей) следующего типа:

Рассмотрим класс задач, зависящих от параметра a.

$$\phi(x_1, ..., x_n, a) \to \max$$
$$\psi_j(x_1, ..., x_n, a) = 0, j = 1, ..., m. \qquad (**)$$

Теорема 10.

Пусть $\boldsymbol{x}(a)$ — решение задачи (**), $\boldsymbol{\lambda}(a)$ — множители Лагранжа, соответствующие решению, и $l(a) = \phi(\boldsymbol{x}(a), a)$.

Предположим, что в точке a_0 выполнены следующие свойства:

♣ функции $\phi(.)$ и $\psi_j(.)$ вогнуты и дифференцируемы,

♣ решение задачи существует и единственно и функция $\boldsymbol{x}(.)$ дифференцируема,

Тогда выполняется соотношение

$$\frac{dl}{da}(a_0) = \frac{\partial \phi}{\partial a}(\boldsymbol{x}(a_0), a_0) + \sum_j \lambda_j(a_0) \frac{\partial \psi_j}{\partial a}(\boldsymbol{x}(a_0), a_0).$$

Теоремы о непрерывности решений задачи оптимизации

Теорема 11.

Пусть $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$ – множество решений задачи

$u(\boldsymbol{x}) \to \max_{\boldsymbol{x}}$

$\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{x} \leqslant \beta(\boldsymbol{p})$,

$\boldsymbol{x} \in X$,

где $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n_+$, $X \subset \mathbb{R}^n$, X–замкнутое, выпуклое и ограниченное множество и $\boldsymbol{0} \in X$. Функция $u(.,.)$ непрерывна и строго квазивогнута на X.

Если функция $\beta(\boldsymbol{p})$ непрерывна и положительна при $\boldsymbol{p} = \bar{\boldsymbol{p}}$, , то функция $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$ непрерывно в окрестности точки $\bar{\boldsymbol{p}}$.

Теорема 12.

Пусть $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$ – множество решений задачи

$u(\boldsymbol{x})\to\max_{\boldsymbol{x}}$

$\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{x} \leqslant \beta(\boldsymbol{p})$,

$\boldsymbol{x} \in X$,

где $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^{n}_{++}$, $X\subset\mathbb{R}^{n}$, X–замкнутое, выпуклое множество и $\mathbf{0}\in X$.

Функция $u(.,.)$ непрерывна и строго квазивогнута на X.

Если функция $\beta(\boldsymbol{p})$ непрерывна и положительна при $\boldsymbol{p} = \bar{\boldsymbol{p}}$, , то функция $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$ непрерывно в окрестности точки $\bar{\boldsymbol{p}}$.

Теорема 13.

Пусть $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$ – множество решений задачи

$u(\boldsymbol{x})\to\max_{\boldsymbol{x}}$

$\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{x} \leqslant \beta(\boldsymbol{p})$,

$\boldsymbol{x} \in X$,

где $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^{n}_{+}$, $X\subset\mathbb{R}^{n}$, X–замкнутое, выуклое и ограниченное множество и $\mathbf{0}\in X$.

Функция $u(.,.)$ непрерывна и строго квазивогнута на X.

Если функция $\beta(\boldsymbol{p})$ непрерывна и положительна при $\boldsymbol{p} = \bar{\boldsymbol{p}}$, , то выпуклозначное отображение $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$ полунепрерывно сверху в окрестности точки $\bar{\boldsymbol{p}}$.

Теорема 14.

Пусть $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$ – множество решений задачи

$u(\boldsymbol{x})\to\max_{\boldsymbol{x}}$

$\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{x} \leqslant \beta(\boldsymbol{p})$,

$\boldsymbol{x} \in X$,

где $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^{n}_{++}$, $X\subset\mathbb{R}^{n}$, X–замкнутое, выпуклое и множество и $\mathbf{0}\in X$.

Функция $u(.,.)$ непрерывна и строго квазивогнута на X.

Если функция $\beta(\boldsymbol{p})$ непрерывна и положительна при $\boldsymbol{p} = \bar{\boldsymbol{p}}$, , то выпуклозначное отображение $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$ полунепрерывно сверху в окрестности точки $\bar{\boldsymbol{p}}$.

Все эти теоремы являются вариантами известного утверждения Бержа:

Теорема 15.

(Многозначное) отображение, которое ставит в соответствие параметру λ множество точек, которые являются решениями следующей экстремальной задачи:

$$u(\boldsymbol{x}, \lambda)\to\max_{\boldsymbol{x}}$$
$$\boldsymbol{x} \in X(\lambda)$$

является полунепрерывным сверху в точке $\bar{\lambda}$, если отображение $X(\lambda)$, и функция $u(\boldsymbol{x}, \lambda)$ непрерывны в окрестности этой точки.

Напомним, что непрерывность многозначного отображения является следующим обобщением непрерывности функции: отображение $X(\lambda)$ является полунепрерывным сверху в точке $\bar{\lambda}$, для всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что ε-окрестность множества $X(\bar{\lambda})$ содержит множества $X(\lambda)$ для всех λ из δ-окрестности $\bar{\lambda}$; отображение $X(\lambda)$ является полунепрерывным снизу в точке $\bar{\lambda}$, для всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех λ из δ-окрестности $\bar{\lambda}$ ε-окрестность множеств $X(\lambda)$ содержит $X(\bar{\lambda})$. Отображение называется непрерывным, если оно непрерывно сверху и снизу одновременно.

Заметим, что поскольку постоянное отображение непрерывно, непрерывность (полунепрепрерывность сверху) функции (отображения) предложения гарантируется при существовании решения задачи потребителя (поскольку функция прибыли непрерывна как функция цен).

Экзамен по микроэкономике для студентов 5 курса

(1998 год)

Первый вариант

1. Покажите, что функция прибыли сепарабельна тогда и только тогда, когда сепарабельна функция спроса.

2. Является ли функция $c(y,w)= y(w_1 - (w_1w_2)^{1/2} + w_2)$ функцией издержек для некоторой технологии.
Если да, то какой?

3. Рассмотрим мир с двумя потребителями, двумя состояниями и двумя (физическими) благами, начальные запасы которых в первом состоянии мира у первого потребителя, а во втором — у второго. Предположим, что предпочтения потребителей описываются функциями полезности Неймана-Моргенштерна следующего вида

$$u_i(x_i) = \sum_{\mathrm{j}} \pi_i^j\, u_i(x_i^j)$$

с элементарной функцией полезности $u_i(x_i^j) = \ln x_i^j$. Предположим также, что оценки вероятностей соответствующих состояний природы у потребителей совпадают т.е. $\pi_i^j = \pi_k^j$, $i,k = 1, ..., \mathrm{n}$. Какими в данном случае будут:
(a) равновесия Эрроу-Дебре
(в) равновесия Раднера в случае, когда существует полная система рынков условно случайных благ на основе одного из двух рассматриваемых благ
(c) равновесия Раднера в случае, когда не существует рынков условно случайных благ.
(d) Парето-оптимальные состояния?

4. Рассмотрим модель с начальными запасами, которые не зависят от состояний природы, строго положительны, а предпочтения потребителей описываются функциями полезности Неймана-Моргенштерна (со строго вогнутой элементарной функцией полезности) следующего вида $u_i(x_i) = \sum\limits_j \pi_i^j\, u_i(x_i^j)$
Предположим также, что оценки вероятностей соответствующих состояний природы у потребителей совпадают т.е. $\pi_i^j = \pi_k^j$, $i,k = 1,..., \mathrm{n}$.
(a) Какими будут Парето-оптимальные состояния в этой модели обмена?
(в) Покажите, что равновесие Эрроу-Дербе в данной модели можно реализовать как равновесие Раднера даже в том случае, когда не существует рынков условно случайных благ.
(c) Покажите, что, вообще говоря, не все равновесия Раднера в этой модели Парето-оптимальны, если не существуют рынки условно случайных благ.

5. Пусть в модели обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают. Гарантирует ли выпуклость предпочтений существование равнове-

сия? Аргументируйте свой ответ.

6. Пусть в модели обмена предпочтения потребителей строго выпуклы, а начальные запасы принадлежат границе Парето. Покажите, что любые равновесия в этой модели (если равновесия существуют) могут различаться только векторами равновесных цен, т.е. если (p, x_1, x_2,...x_m) и (p′, x'_1, x'_2,...x'_m), то $x_i = x'_i$, $i = 1, ..., m$. Покажите, что условие строгой выпуклости необходимо для справедливости утверждения. Какие дополнительные условия гарантируют:
- единственность равновесия (если оно существует);
- существование равновесия?

7. Покажите, что в модели обмена (с m потребителями) и совпадающими и строго выпуклыми предпочтениями потребителей эгалитарное распределение

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\omega_i.$$

принадлежит границе Парето. При каких дополнительных предположениях относительно параметров модели и каких ценах его можно реализовать как равновесие?

8. В модели найма контракт называется оптимальным первого порядка, если он обеспечивает собственнику максимальный уровень полезности среди достижимых без учета ограничений участия
Покажите, что в модели найма вообще говоря не существует оптимального контракта первого ранга. Однако если менеджер — нейтрален по отношению к риску, то любой оптимальный контракт является оптимальным первого ранга. Приведите пример такого контракта.

9. Покажите, что в модели найма (с конечным числом действий и исходов). оплата менеджера (в соответствие с оптимальным контрактом) вообще говоря не является монотонно возрастающей функцией от исхода.

10. Частичная информация о поведении потребителя (в экономике с двумя благами) представлена в следующей таблице.

Наблюдение	Цена первого блага	Цена второго блага	Объем покупок первого блага	Объем покупок второго блага
1	10	10	10	10
2	10	8	12	?

При каких объемах покупок первого блага
(а) это поведение не совместимо с моделью рационального поведения (максимизации полезности при бюджетном ограничении) в предположении, что предпочтения локально ненасыщаемы и строго выпуклы?
(в) потребительский набор при первом наблюдении предпочитается потребительскому набору при втором?
(с) потребительский набор при втором наблюдении предпочитается потребительскому набору при первом?
11. Покажите, что если функция (отображение) спроса x(p,Y) удовлетворяет

закону Вальраса и слабой аксиоме выявленных предпочтений, то x(p,Y) положительно однородна первой степени.

12. Пусть прибыль каждого из двух производителей зависит не только от объема использованного им ресурса, но и от объема ресурса, использованного другим, т.е..
$p_1(a,b) = a^{1/3}b^{1/3} – a$,
$p_2(a,b) = a^{1/3}b^{1/3} – b$,
Предположим также, что рынки ресурсов и производимых продуктов конкурентные.
Каким тогда будут
- оптимальные объемы использования ресурсов;
- равновесные объемы?
Какие известные вам меры могут преодолеть фиаско рынка в данном случае? Аргументируйте свой ответ, приводя соответствующие выкладки.

Второй вариант

1. Восстановите прямую функцию полезности потребителя на основе его непрямой функции полезности

$$v(p_1,\dots,p_n,Y) = \ln Y – \sum_i a_i \ln p_i.$$

2. Вычислите функцию прибыли и функцию издержек для технологии, определяемой производственной функцией Кобба-Дугласа

$$f(\boldsymbol{x}) = \prod x_i^{\alpha_i}$$

и прямым вычислением покажите, что в данном случае выполняется лемма Шепарда и лемма Хотеллинга.

3. Покажите, что функция $\pi(\boldsymbol{p})$ является функцией прибыли некоторой технологии тогда и только тогда, когда она выпуклая и положительно однородная первой степени.

4. Покажите, что квазилинейной функции полезности соответствует непрямая функция полезности, которая имеет форму Гормана

$$v(p,Y) = a(\mathbf{p}) + b(\mathbf{p})Y$$

и является выпуклой функцией цен.

5. Покажите, что если в модели обмена непрямые функции полезности потребителей квазилинейны то равновесие, если существует, единственно.

6. Покажите, что в модели обмена с двумя товарами и двумя потребителями с функциями полезности

$$u^1(\mathbf{x}^1) = x_1^1 + x_2^1$$
$$u^2(\mathbf{x}^2) = x_1^2$$

и начальными запасами $\omega^1 = (0,1)$ и $\omega^2 = (1,0)$ не существует равновесия. Какие изменения в условиях задачи (параметрах модели) будут гарантировать существование равновесия?

7. Рассмотрим модель обмена с одним благом, двумя потребителями, предпочтения которых описываются следующими функцией полезности Неймана-

Моргенштерна с вогнутой элементарной функцией полезности

$$u_i(x_i) = \sum_j \pi_i^j u_i(x_i^j)$$

а начальные запасы условно случайных благ одинаковы у обоих потребителей и строго положительны. Каким будет равновесие, если один из потребителей рискофоб а другой нейтрален по отношению к риску,

(а) случае если оценки вероятностей соответствующих состояний природы у обоих потребителей совпадают т.е.

$$\pi_{\mathrm{i}}^j = \pi_2^j.$$

(в) эти оценки различаются

(с) каким будет равновесие в ситуации (а) и (в), если оба потребителя нейтральны по отношению к риску.

8. Рассмотрим модель с начальными запасами, которые не зависят от состояний природы, строго положительны, а предпочтения потребителей описываются функциями полезности Неймана-Моргенштерна со строго вогнутой элементарной функцией полезности следующего вида

$$u_i(x_i) = \sum_j \pi_i^j u_i(x_i^j)$$

9. Предположим также, что оценки вероятностей соответствующих состояний

природы у потребителей совпадают т.е.

$$\pi_i^j = \pi_k^j,\ i,k = 1,..., \mathrm{n}.$$

(а) Какими будут в данном случае Парето-оптимальные состояния?

(б) Покажите, что в данном случае, равновесие Эрроу-Дебре будем и равновесием Раднера даже и при отсутствии рынков условно-случайных благ.

(в) Покажите, что если рынков условно-случайных благ нет, то в данном случае могут существовать равновесия Раднера, которые не являются равновесиями Эрроу-Дебре.

10. Какое соотношение между потребительским излишком, компенсирующей и эквивалентной вариацией при изменении только одной цены?

11. Покажите, что если отношение предпочтения ассиметрично и отрицательно транзитивно, то оно ациклично.

12. Покажите, что если функция выбора на множестве альтернатив определяется ассиметричным и отрицательно транзитивным отношением предпочтения, то она удовлетворяет аксиоме Хаутеккера (выявленных предпочтений. Верно ли обратное утверждение? Приведите соответствующие контрпримеры.

13. Предположим, что сообщество любителей быстрой езды состоит из двух автомобилистов. У быстрой езды есть, однако, оборотная сторона — с увеличением скорости увеличивается риск аварии. Пусть $p(x^1,x^2)$ вероятность аварии, если скорости первого и второго автомобиля составляют, соответственно, x^1 и x^2. Пусть функция полезности автомобилиста i имеет вид

$$u_i(x^1,x^2) = v(x^i) + p(x^1,x^2)c^i$$

где c^i — его издержки, связанные с аварией. Каковы при этом издержки каждого автомобилиста (включающие и штраф).
Покажите, что каждый автомобилист заинтересован ехать слишком быстро (с общественной точки зрения).
Каким должен быть штраф t^i в случае аварии, чтобы интернизировать экстерналии? Каковы при этом издержки каждого автомобилиста (включающие и штраф)? Как следует интернизировать экстерналии в случае, если полезность автомобилиста будет равна

$$v(x^i)$$

если авария не произойдет и

$$-p(x^1,x^2)c^i$$

если произойдет?

14. Для модели найма (с двумя возможными действиями) покажите, что
(а) Если собственник нейтрален по отношению к риску, а менеджер — рискофоб, причем действия менеджера наблюдаемы собственником, то в интересах собственника полностью застраховать менеджера, связав оплату его услуг с его действиями. Другими словами, оплата услуг менеджера не будет зависеть от дохода предприятия. Какой в таком случае будет схема стимулирования (оплата услуг менеджера)?
(б) Если собственник нейтрален по отношению к риску, а менеджер — рискофоб, причем интересы собственника и менеджера не совпадают (для действия b, предпочитаемого собственником, выполняется соотношение c(b)) > c(a)), то оба ограничения будут существенными, т.е оплата услуг менеджера будет зависеть от дохода предприятия. Какой в таком случае будет схема стимулирования (оплата услуг менеджера)?
(в) Как будет выглядеть оптимальный контракт найма, если c(b))≤c(a)?

15. Предположим, что в аукционе принимает участие n ($n>2$) покупателей и i-ый участник аукциона оценивает выставленный на аукцион товар в $v(i)$ рублей
(а) Какая цена будет заплачена на этот товар и какой участник аукциона его приобретет, если аукцион английский? (На английском аукционе ставки повышаются на 1 д.е. начиная с минимальной цены, объявленной аукционщиком, а выставленный на аукцион товар продается тому, кто в конечном счете назовет наибольшую цену).
(б) Какая цена будет выплачена за товар и кто его приобретет, если аукцион американский, а его победитель — покупатель товара — заплатит цену за приобретенный товар, равную максимальной среди названных остальными участниками аукциона цен? (На американском аукционе предлагаемая i-ый участником цена подается аукционщику в запечатанном конверте и не известна другим участникам аукциона до момента объявления всех предложенных цен).

16. Охарактеризуйте соотношения между кривыми средних, переменных средних и предельных издержек.
Что из нижеследующего верно:
(1) Средние постоянные издержки при росте выпуска не возрастают
(2) Средние совокупные издержки всегда не ниже средних переменных издержек.
(3) Если предельные издержки возрастают, то средние не убывают.